Andreas Gathmann Wintersemester 2021/22

Einführung in die Funktionentheorie – Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 20. Januar bis 15:00

(1) (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+2^n} z^n$?

(b) Wie viele verschiedene Laurent-Reihen mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2-z-2}$? Berechne explizit diejenige dieser Reihen, die im Punkt $1+\mathrm{i}$ konvergiert.

(2) Liegt für die folgenden Funktionen f im Nullpunkt eine hebbare Singularität / Nullstelle (welcher Ordnung) / Polstelle (welcher Ordnung) / wesentliche Singularität vor?

(a) $f(z) = \dfrac{\cos(z^2)-1}{\mathrm{e}^{\sin z}-1}$;

(b) $f(z) = z \cdot \log z$;

(c) $f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$ für eine holomorphe Funktion g mit Null- oder Polstelle in 0;

(d) $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$ für eine holomorphe Funktion g mit einem Pol im Nullpunkt.

(3) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Beweise, dass f von der Form $z \mapsto az+b$ für gewisse $a,b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ sein muss.

(Hinweis: Zeige zunächst mit dem Satz von Casorati-Weierstraß, dass die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ keine wesentliche Singularität im Nullpunkt haben kann.)

(4) Es sei $f\colon \mathbb{C}\backslash\{z_1,\dots,z_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf der gesamten komplexen Ebene mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1,\dots,z_n$ definiert ist.

Man zeige: Ist kein z_i eine wesentliche Singularität von f und gilt $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, so ist f von der Form $f = \frac{p}{q}$ für zwei Polynome p und q (d. h. f ist eine *rationale Funktion*).