Andreas Gathmann Wintersemester 2021/22

Einführung in die Funktionentheorie – Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 6. Januar bis 15:00

(1) Für $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ und $a \in \mathbb{C}$ definieren wir die *(allgemeine) komplexe Potenz* analog zum reellen Fall als $z^a := \mathrm{e}^{a \log z}$.

(a) Beweise für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die „allgemeine binomische Formel“

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n,$$

wobei $\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

(b) Berechne die Integrale $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{2^z}{z^2}\, dz$ und $\displaystyle\int_{|z|=1} z^3 \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\, dz$.

(2) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir setzen voraus, dass es Konstanten $c, R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f(z)| \leq c\,|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ ist (d. h. „f wächst höchstens polynomial vom Grad n für $z \to \infty$“).

Zeige, dass f dann schon ein Polynom vom Grad höchstens n sein muss.

(3) (a) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Man zeige: Sind $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $fg = 0$, so ist $f = 0$ oder $g = 0$.

(b) Man zeige: Ist $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(\mathbb{R}_{>0}) \subset \mathbb{R}$, so gilt auch $f(\mathbb{R}_{<0}) \subset \mathbb{R}$.
(Hinweis: Betrachte die Funktion $g\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$.)

(4) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Man zeige:

(a) Ist f nicht konstant, so ist das Bild $f(\mathbb{C})$ *dicht* in $\mathbb{C}$ (d. h. in jeder Umgebung jedes Punktes von $\mathbb{C}$ liegt mindestens ein Punkt von $f(\mathbb{C})$).

(b) Gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist $f = \mathrm{e}^h$ für eine holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Das Team der Funktionentheorie
wünscht euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch
ins neue Jahr!