Einführung in die Funktionentheorie – Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 9. Dezember bis 15:00

(1) Berechne mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=2} \frac{e^{2z^2}}{z^3+1}\,dz$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z(z-w)}\,dz$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \neq 1$.

(2) Es sei f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$, die die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ enthält. Man zeige:

(a) Ist $|f|$ auf ∂K konstant, so hat f eine Nullstelle in K oder ist konstant auf K.

(b) $\operatorname{Re} f$ nimmt auf K sein Maximum auf dem Rand ∂K an.

(3) Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen und konvexen Menge D. Man zeige:

(a) Gilt $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subset D$, so besitzt f auf D eine Stammfunktion.
(Hinweis: Man schaue sich noch einmal den Beweis der Existenz von Stammfunktionen holomorpher Funktionen auf einfach zusammenhängenden Mengen an.)

(b) Gibt es ein $a \in D$, so dass f auf $D\backslash\{a\}$ holomorph ist, so besitzt f auf D eine Stammfunktion.

(Wir werden später in der Vorlesung noch sehen, dass f damit dann automatisch auch auf D holomorph ist. Teil (b) besagt also, dass eine holomorphe Funktion auf $D\backslash\{a\}$, die stetig nach a fortgesetzt werden kann, damit sogar holomorph nach a fortgesetzt ist.)

(4) Man zeige:

(a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, so dass $f(z) = \bar{z}^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(b) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass $f(z) = \bar{z}^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.