Einführung in die Funktionentheorie – Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 25. November bis 15:00

(1) (a) Berechne die Wegintegrale

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)^2}\,dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma \bar{z}^2\,dz$$

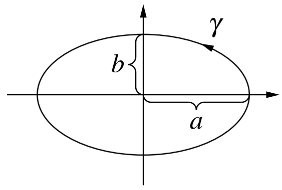
entlang einer geraden Strecke γ von 1 nach i.

(b) Untersuche, ob die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}^2$ eine Stammfunktion besitzt.

(2) Es sei γ wie in der Skizze der Weg, der einmal entgegen dem Uhrzeigersinn entlang des Randes einer Ellipse mit Halbachsen a und b läuft.

Beweise ohne Verwendung von Stammfunktionen die Formel

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab},$$



indem du das Wegintegral $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ sowohl nach Definition als auch mit Hilfe der Homotopieinvarianz berechnest (benutzte Homotopien dabei bitte konkret angeben).

(3) Es sei $D := \{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : r \in \mathbb{R}_{>0},\, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{C}$ das Komplement der negativen reellen Achse. Man zeige:

(a) Die Abbildung $\log\colon D \to \mathbb{C}$ mit $\log z := \log r + \mathrm{i}\varphi$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf D. Wir nennen $\log z$ den *komplexen Logarithmus* von z.

(b) Es seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig. Dann gilt für jeden Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ von z_1 nach z_2

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \log z_2 - \log z_1 + 2\pi \mathrm{i} k \qquad (*)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.
(Hinweis: Eine Möglichkeit hierfür besteht darin, zu zeigen, dass die Funktion

$$g\colon [a,b] \to \mathbb{C},\; x \mapsto \frac{\gamma(a)}{\gamma(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt\right)$$

konstant ist.)

(c) Umgekehrt gibt es für alle $z_1, z_2 \in D$ und $k \in \mathbb{Z}$ einen Weg γ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ von z_1 nach z_2, so dass $(*)$ gilt.

(4) In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass der Cauchysche Integralsatz bereits mächtig genug ist, um damit einen ersten kurzen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra zu geben — also der Aussage, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.

Es sei f dazu zunächst ein nicht-konstantes *reelles* Polynom, von dem wir annehmen, dass es keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hätte. Man zeige dann für das Wegintegral

$$I := \int_{|z|=1} \frac{1}{z f\left(z + \frac{1}{z}\right)}\,dz$$

(a) mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass $I = 0$;

(b) mit Hilfe der Definition des Wegintegrals, dass $I \neq 0$.

Wie folgt daraus der Fundamentalsatz der Algebra?