Andreas Gathmann Wintersemester 2021/22

Einführung in die Funktionentheorie – Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 11. November bis 15:00

(1) (a) In welchen Punkten ist die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (2z+\overline{z}) \cdot |z|^2$ komplex differenzierbar? Berechne dort auch die Ableitung!

(b) Visualisiere die Funktion $g\colon D \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$ mit $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ und } \operatorname{Im} z \geq 0\}$, indem du die Bilder unter g von achsenparallelen Geraden $\{t + \mathrm{i}a : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ und $\{a + \mathrm{i}t : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ mit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ skizzierst.

(2) Können die folgenden Funktionen $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ der Realteil einer holomorphen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sein? Falls ja, bestimme man alle solchen holomorphen Funktionen f.

(a) $u(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2$;

(b) $u(x+\mathrm{i}y) = x^2 + y^2$.

(3) Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ eine offene Kreisscheibe (mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$). Man zeige für jede holomorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$:

(a) Ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, dann ist f konstant.

(b) Ist $f(D) \subset \mathbb{R}$, dann ist f konstant.

(c) Ist $|f|$ konstant, dann ist f konstant.

(4) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei $a \in D$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$.

Zeige, dass es dann offene Umgebungen $U \subset D$ von a sowie $V \subset \mathbb{C}$ von $f(a)$ gibt, so dass die Einschränkung $f|_U : U \to V$ bijektiv und ihre demzufolge dort existierende Umkehrfunktion $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls holomorph mit Ableitung $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$ ist.

(Hinweis: Der Satz über lokale Umkehrfunktionen aus den Grundlagen der Mathematik ist hier sicher nützlich. Ihr dürft ohne Beweis verwenden, dass die Ableitung $f'\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist — wir werden später in der Vorlesung noch sehen, dass dies für holomorphe Funktionen immer der Fall ist.)

Bitte werft eure Lösungen bis zum Abgabetermin ins Postfach eures Übungsleiters neben Raum 48-210 oder ladet sie im OLAT-Kurs hoch.