Andreas Gathmann Wintersemester 2021/22

Einführung in die Funktionentheorie – Blatt 0

(keine Abgabe)

(1) Stelle die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x+\mathrm{i}y$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ dar:

(a) $z = \frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$;

(b) $z = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1357}$;

(c) alle Lösungen der Gleichung $z^4+z^2+1=0$;

(d) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\left|\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right| < 1$.

(2) Für $z \in \mathbb{C}$ mit Polarkoordinatendarstellung $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in (-\pi,\pi]$ definieren wir die Wurzel wie erwartet als $\sqrt{z} := \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\varphi}{2}}$. Insbesondere ist dann also $(\sqrt{z})^2 = z$ für alle z, und $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. Was *genau* ist an den folgenden scheinbar widersprüchlichen Rechnungen falsch?

(a) $-1 = \mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

(b) $\mathrm{e}^{-4\pi^2} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{2\pi\mathrm{i}} = 1^{2\pi\mathrm{i}} = 1$.

(3) Welche der folgenden bekannten Eigenschaften der reellen Winkelfunktionen sind auch für alle komplexen Zahlen gültig?

(a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für alle z.

(b) $|\cos z| \leq 1$ für alle z.

(c) Die Gleichung $\sin z = 0$ hat genau die Lösungen $n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

(d) $\sin 2z = 2\sin z \cos z$ für alle z.

(4) Bestimme *alle* $z \in \mathbb{C}$, für die die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergiert.

(Hinweis: Für den Rand des Konvergenzgebiets betrachte man die Reihe $(z-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.)