9. Laurent-Reihen

In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, dass sich holomorphe Funktionen lokal um jeden Punkt z_0 in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entwickeln lassen, und daraus viele interessante Eigenschaften holomorpher Funktionen hergeleitet. Wir wollen diese Idee nun dahingehend verallgemeinern, dass wir in diesen Reihen auch negative Potenzen von $z-z_0$ zulassen. Die Untersuchung dieser neuen Reihen wird ganz analog zu der von Potenzreihen verlaufen, aber trotzdem am Ende wieder einige neue interessante Resultate abwerfen.

Definition 9.1 (Laurent-Reihen)**.** Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine **Laurent-Reihe** um z_0 ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n}_{=:f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{=:f^+(z)}$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{C}$. Dabei nennen wir f^- (die Summe der Terme mit negativen Exponenten von $z-z_0$) den **Hauptteil** und f^+ (die Summe der restlichen Terme) den **Nebenteil** von f.

Wie bei Potenzreihen wollen wir natürlich als Erstes untersuchen, für welche Werte z eine gegebene Laurent-Reihe konvergiert. Dabei ist von vornherein schon einmal klar, dass wir — falls mindestens ein Koeffizient a_n mit $n<0$ ungleich Null ist — den Wert $z=z_0$ prinzipiell nicht einsetzen dürfen, da in diesem Fall schon der einzelne Term $a_n\,(z-z_0)^n$ nicht definiert wäre.

Bemerkung 9.2. Beachte, dass wir den „doppelten Grenzwert" in den Laurent-Reihen, also die Summe von $-\infty$ bis ∞, durch Aufspalten der Summe in zwei Teile f^+ und f^- in zwei einfache Grenzwerte verwandelt haben — eine Laurent-Reihe f konvergiert für ein z also *nach Definition* genau dann, wenn die Reihen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ konvergieren. Dies ist z. B. *nicht* das gleiche wie die evtl. auch naheliegende Festlegung

$$f(z) \stackrel{?}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n\,(z-z_0)^n, \qquad (*)$$

wie das Beispiel der Laurent-Reihe

$$f(z) = \cdots + z^{-3} - z^{-2} + z^{-1} - z + z^2 - z^3 \pm \cdots,$$

also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n=0, \\ (-1)^n & \text{für } n>0, \\ (-1)^{n+1} & \text{für } n<0 \end{cases}$$

zeigt: Setzen wir hier z. B. $z=1$ ein, so gilt $\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, d. h. der Grenzwert $(*)$ ist gleich Null. Die Laurent-Reihe ist für $z=1$ jedoch *nicht* konvergent, da $f^+(1) = -1+1-1\pm\cdots$ (und analog auch $f^-(1)$) divergiert.

Bemerkung 9.3. Schreiben wir die Laurent-Reihe aus Definition 9.1 als

$$f(z) = f^-(z) + f^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

so sehen wir sofort, dass f^- und f^+ einfach Potenzreihen (in $\frac{1}{z-z_0}$ bzw. $z-z_0$) sind. Wir können unsere Resultate über Potenzreihen aus Kapitel 7 also ganz einfach auf den Fall von Laurent-Reihen übertragen. Sind z. B. $\frac{1}{r}$ und R die Konvergenzradien dieser beiden Potenzreihen f^- bzw. f^+, so ist nach den Bemerkungen 7.2 und 9.2 klar, dass die Laurent-Reihe konvergiert, wenn $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{r}$ (also

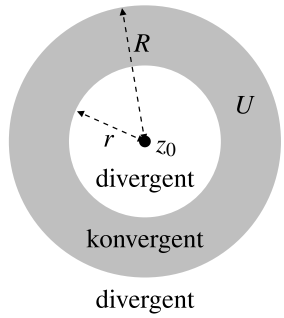
$|z-z_0|>r$) und $|z-z_0|<R$ gilt, und dass sie divergiert, falls $|z-z_0|<r$ oder $|z-z_0|>R$ ist. Damit ergibt sich sofort das folgende Resultat:

08

Folgerung 9.4. *Es sei $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Laurent-Reihe. Ferner seien $\frac{1}{r}$ und R wie oben die Konvergenzradien des Hauptteils f^- bzw. Nebenteils f^+ dieser Reihe — es ist nach Bemerkung 7.2 also*

$$r=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{-n}|} \quad \textit{und} \quad R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dann gilt:



(a) *Die Reihe $f(z)$ ist (absolut) konvergent für alle z in dem Kreisring $U=\{z\in\mathbb{C}: r<|z-z_0|<R\}$. Sie ist divergent für alle z mit $|z-z_0|<r$ oder $|z-z_0|>R$. Auf dem Rand, also falls $|z-z_0|=r$ oder $|z-z_0|=R$ ist, kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz auftreten.*

(b) *Die Konvergenz ist gleichmäßig in z auf jedem kompakten Kreisring um z_0, der ganz in U liegt (siehe Bemerkung 7.2).*

*Wir nennen U den **Konvergenzring** von f (beachte, dass U auch leer sein kann, falls nämlich $r\geq R$ ist).*

Bemerkung 9.5.

(a) Ein wichtiger Spezialfall von Folgerung 9.4 ist der, wenn $\frac{1}{r}=\infty$, der innere Radius r also gleich Null ist — was z. B. stets dann passiert, wenn der Hauptteil f^- nur aus endlich vielen Termen besteht und somit stets konvergiert. In diesem Fall ist der „Kreisring" $\{z\in\mathbb{C}: r<|z-z_0|<R\}$ einfach eine „punktierte Kreisscheibe", also eine Kreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt. Wir werden diesen Spezialfall in Kapitel 10 noch genauer untersuchen.

(b) Da eine Laurent-Reihe einfach die Summe zweier Potenzreihen (in $z-z_0$ bzw. $\frac{1}{z-z_0}$) ist, ist aufgrund von Folgerung 7.6 klar, dass eine solche Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion darstellt und ihre Ableitungen wie erwartet gliedweise berechnet werden können.

Beispiel 9.6.

(a) Wir betrachten die Laurent-Reihe

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \underbrace{\frac{1}{z}}_{f^-} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}_{f^+}.$$

Der Hauptteil f^- ist ein Polynom in $\frac{1}{z}$ und „konvergiert" damit natürlich für alle $z\neq 0$. Der Nebenteil f^+ hat bekanntlich Konvergenzradius 1 und ist einfach gleich der geometrischen Reihe. Also ist der Konvergenzring von f der Kreisring $\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<1\}$, und die dort durch f dargestellte holomorphe Funktion

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z(1-z)}.$$

(b) Für die nur aus dem Hauptteil bestehende Laurent-Reihe

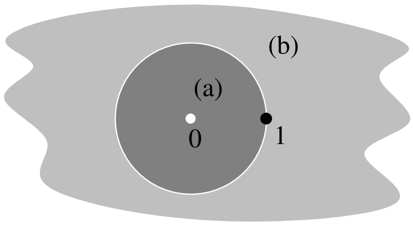
$$f(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

ist der Konvergenzradius des Hauptteils wieder gleich 1, und der Konvergenzradius des (nicht existierenden) Nebenteils trivialerweise ∞. Also ist der Konvergenzring von f gleich

$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$. Die auf diesem Gebiet durch f dargestellte Funktion lässt sich wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe einfacher hinschreiben:

$$f(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)}.$$

Wir erhalten also dieselbe Funktion wie in (a) — nur in einem anderen (disjunkten) Kreisring! Das folgende Bild verdeutlicht dies.



$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$

in (a): $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$

in (b): $f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$

Aufgabe 9.7.

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+2^n}(z-1)^n$?

(b) Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Was ist dann der Konvergenzring der Laurent-Reihe $g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{|n|} z^n$? Welche Funktion wird durch g dargestellt?

Wir haben gerade schon festgestellt, dass jede Laurent-Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion definiert. Die besondere Bedeutung der Laurent-Reihen liegt nun darin, dass — wie ihr vielleicht schon erwartet — genau wie bei Potenzreihen auch hier die Umkehrung gilt, also dass sich jede holomorphe Funktion auf jedem Kreisring, der noch im Definitionsgebiet liegt, dort in eine Laurent-Reihe entwickeln lässt. Dies besagt der folgende Satz, dessen Aussage und Beweis völlig analog zu Satz 7.10 sind:

Satz 9.8 (Laurent-Entwicklung holomorpher Funktionen). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiterhin seien $z_0 \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig in D!) und $r < R$ reelle Zahlen, so dass der Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ ganz in D liegt. Dann gilt:*

(a) *Die Funktion f lässt sich auf U als Laurent-Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

schreiben (deren Konvergenzring U enthält).

(b) *Die Koeffizienten dieser Reihe sind eindeutig; sie sind bestimmt durch die Formel*

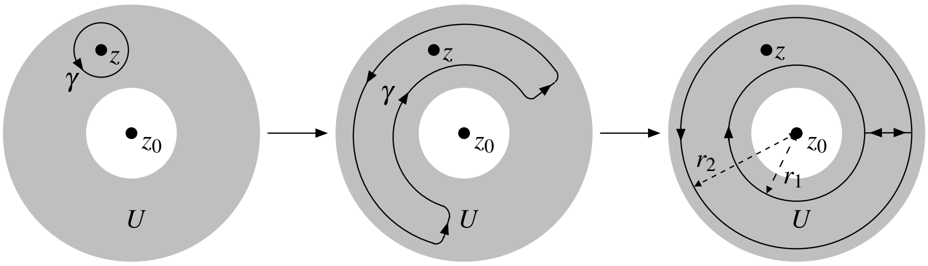
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

für ein beliebiges ρ mit $r < \rho < R$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 7.10 gilt zunächst für alle $z \in U$ aufgrund der Cauchyschen Integralformel aus Satz 6.7

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

für eine Kreislinie γ, die wie im folgenden Bild links in U liegt und einmal um den Punkt z herumläuft:



Nach der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (siehe Folgerung 5.3 (a)) können wir diesen Weg nun durch einen anderen in $U\backslash\{z\}$ homotopen Weg ersetzen, denn der Integrand ist auf dieser Menge holomorph. Wie im Bild oben „ziehen wir ihn dazu im Kreisring U auseinander“, bis er aus zwei Kreislinien um z_0 (mit Radien r_1 und r_2, wobei $r_1 < |z-z_0| < r_2$) besteht, die in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und durch ein Geradenstück miteinander verbunden sind (das in beiden Richtungen durchlaufen wird und sich damit weghebt). Es gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \Bigg(\underbrace{\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{\text{(A)}} - \underbrace{\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{\text{(B)}} \Bigg).$$

Den Term (A) behandeln wir nun wörtlich genauso wie im Beweis von Satz 7.10: Wir schreiben

$$\text{(A)} = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\,dw$$

und können den rechten Faktor im Integranden wegen $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$ in die geometrische Reihe entwickeln:

$$\text{(A)} = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw = \int_{|w-z_0|=r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n\,dw.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden können wir die Summe mit dem Integral vertauschen und erhalten so die Potenzreihe

$$\text{(A)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \right) (z-z_0)^n.$$

Den Term (B) können wir ganz analog behandeln: Hier schreiben wir allerdings

$$\text{(B)} = -\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\,dw$$

und entwickeln den rechten Faktor im Integranden wegen $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$ in die folgende geometrische Reihe:

$$\text{(B)} = -\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dw = -\int_{|w-z_0|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot (w-z_0)^n\,dw.$$

Vertauschen wir auch hier wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden die Summe mit dem Integral, so erhalten wir die Laurent-Reihe

$$\text{(B)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|w-z_0|=r_1} f(w)\,(w-z_0)^n\,dw \right) (z-z_0)^{-n-1}.$$

Also lassen sich sowohl (A) als auch (B) — und damit auch f — in U als Laurent-Reihen schreiben. Dies zeigt Teil (a) des Satzes.

Für die Eindeutigkeit und die Formel aus (b) sei nun $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine solche Darstellung als Laurent-Reihe. Für alle ρ mit $r < \rho < R$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-n-1}\,dz = a_n$$

nach Beispiel 3.11 (b). □

Beispiel 9.9.

(a) Liegt in Satz 9.8 nicht nur der Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, sondern sogar die ganze Kreisscheibe $U' = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ in D, so erhalten wir unsere Taylor-Entwicklung aus Satz 7.10 zurück: Dann ist nämlich zunächst für $n < 0$

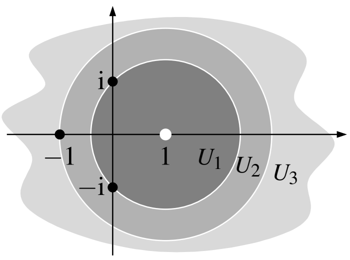
$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = 0$$

nach der Cauchyschen Integralformel aus Satz 4.1, da der Integrand dann holomorph in U' ist. Für $n \geq 0$ hingegen stimmt die in Satz 9.8 angegebene Formel für die Koeffizienten a_n mit der aus Satz 7.10 überein. Die Taylor-Entwicklung ist also ein Spezialfall der Laurent-Entwicklung.

(b) Analog zu Beispiel 7.11 können wir auch im Fall von Laurent-Reihen holomorpher Funktionen oft die Konvergenzgebiete angeben, ohne die Reihen explizit zu kennen. Wollen wir z. B. die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{\pm 1, \pm \mathrm{i}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{1-z^4}$$

(die genau in den vierten Einheitswurzeln nicht definiert ist) als Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt 1 schreiben, so gibt es wie im Bild rechts genau drei maximale Kreisringe mit Mittelpunkt 1, auf denen f holomorph ist, nämlich



$$\begin{aligned} U_1 &= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \sqrt{2}\}, \\ U_2 &= \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-1| < 2\}, \\ U_3 &= \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-1|\}. \end{aligned}$$

Also besitzt f nach Satz 9.8 genau drei Laurent-Entwicklungen mit Entwicklungspunkt 1, nämlich je eine in U_1, U_2 und U_3.

(c) In manchen Fällen kann man die Laurent-Entwicklung einer holomorphen Funktion auch aus bekannten Reihenentwicklungen gewinnen. So ergibt sich z. B. die Laurent-Reihe der Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ auf dem Kreisring $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ einfach aus der Definition der Exponentialfunktion als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Aufgabe 9.10. Wie viele verschiedene Laurent-Reihen mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2-z-2}$? Berechne diese Reihen explizit und gib ihre Konvergenzringe an.