7. Potenzreihen und Taylor-Reihen

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel wollen wir nun in diesem Kapitel ein weiteres sehr zentrales Resultat der Funktionentheorie herleiten, nämlich dass sich holomorphe Funktionen stets lokal um jeden Punkt als eine Potenzreihe schreiben lassen. Aus diesem Grund werden Potenzreihen in dieser Vorlesung letztlich auch eine weit größere Rolle spielen als in der reellen Analysis (in der keine derartige Aussage gilt).

Zu Beginn benötigen wir aber zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Potenzreihen, die im Komplexen genauso wie im Reellen gelten und die wir zur Erinnerung aus den Grundlagen der Mathematik kurz wiederholen wollen.

Definition 7.1 (Potenzreihen)**.** Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine **Potenzreihe** um z_0 ist ein Ausdruck der Form

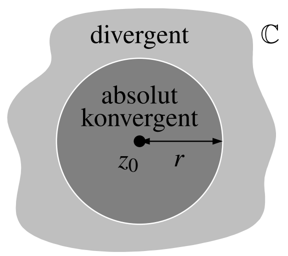
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{C}$. Man nennt z_0 auch den **Entwicklungspunkt** der Reihe.

Bemerkung 7.2 (Konvergenz von Potenzreihen)**.** Am wichtigsten ist bei einer Potenzreihe zunächst die Frage, für welche Werte $z \in \mathbb{C}$ sie konvergiert und für welche divergiert. Aus den Grundlagen der Mathematik wissen wir dazu bereits, dass die Reihe einen **Konvergenzradius** $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ besitzt, so dass gilt [G2, Satz 7.26 und 8.37]:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ im **Konvergenzkreis** $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$ konvergiert die Reihe $f(z)$ absolut. Auf jedem darin enthaltenen kompakten Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq R\}$ mit $R < r$ ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > r$ divergiert die Reihe $f(z)$.



Auf dem Rand des Konvergenzkreises, also für $|z-z_0| = r$, kann je nach der betrachteten Reihe in manchen Punkten Konvergenz und in anderen Divergenz auftreten.

Aus dem Wurzelkriterium in Bemerkung 1.7 (d) erhält man außerdem, dass sich der Konvergenzradius einer Potenzreihe mit Hilfe der sogenannten Formel von **Cauchy-Hadamard**

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnen lässt, da die Potenzreihe ja konvergiert bzw. divergiert, wenn der Ausdruck

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (z-z_0)^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0| = \frac{|z-z_0|}{r}$$

kleiner bzw. größer als 1 ist, also $|z-z_0| < r$ bzw. $|z-z_0| > r$ gilt [G2, Satz 7.26]. Die Formel von Cauchy-Hadamard ist auch anwendbar, wenn der dort betrachtete Limes superior gleich 0 oder ∞ (und der Konvergenzradius damit ∞ bzw. 0) ist.

Genauso sieht man mit dem Quotientenkriterium, dass

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

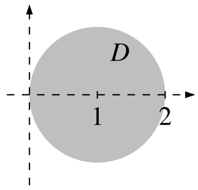
gilt, falls dieser Grenzwert existiert [G2, Satz 7.28]. Im Fall der Nichtexistenz dieses Grenzwerts lässt sich der Konvergenzradius mit diesem Kriterium jedoch nicht berechnen.

Beispiel 7.3.

(a) Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$ hat nach der Quotientenformel aus Bemerkung 7.2 den Konvergenzradius

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1,$$

konvergiert also absolut auf der Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ und divergiert für alle z mit $|z-1| > 1$. Auf dem Rand ∂D des Konvergenzkreises tritt unterschiedliches Verhalten auf: So ist z. B. $f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ die konvergente alternierende harmonische Reihe und $f(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die divergente harmonische Reihe.



(b) Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n$ hat nach der gleichen Formel den Konvergenzradius

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Vergleichen wir dies mit der Formel von Cauchy-Hadamard, so erhalten wir also

$$1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}, \quad \text{und damit} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Da zusätzlich natürlich $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \geq 1$ und damit auch $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \geq 1$ gilt, folgt hieraus, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist — was vermutlich eine der einfachsten Arten ist, diesen speziellen, in der Analysis oft betrachteten Grenzwert zu berechnen [G2, Beispiel 7.29 (b)].

Bemerkung 7.4 (Formale Ableitungen von Potenzreihen)**.** Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Wir definieren ihre **formale Ableitung** als die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}$$

und erwarten, dass dies im Konvergenzkreis auch wirklich die Ableitung der Funktion $f\colon z \mapsto f(z)$ ist, also dass Potenzreihen holomorphe Funktionen darstellen und „gliedweise differenziert werden können“. In der Tat wissen wir dies für reelle Potenzreihen auch schon aus den Grundlagen der Mathematik [G2, Folgerung 10.28]. Der dort üblicherweise gegebene Beweis verwendet jedoch den Mittelwertsatz und lässt sich damit nicht wörtlich auf den komplexen Fall übertragen. Wir wollen diesen komplexen Fall daher jetzt auf den reellen zurückführen.

Als Erstes erinnern wir uns dazu daran, dass die formale Ableitung g zumindest den gleichen Konvergenzradius r wie die ursprüngliche Reihe f hat [G2, Aufgabe 7.31]. Am schnellsten erhält man dieses Resultat vermutlich aus der Formel von Cauchy-Hadamard: Der Konvergenzradius der Reihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}$ ist natürlich derselbe wie der der Reihe $(z-z_0)\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^n$, also

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n\, a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r,$$

da der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ nach Beispiel 7.3 (b) gleich 1 ist.

Das gewünschte Resultat, dass die formale Ableitung einer Potenzreihe gleich ihrer „gewöhnlichen“ Ableitung ist, ergibt sich damit nun aus dem folgenden Satz über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung.

Satz 7.5 (Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $(f_n)_n$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D, die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Weiterhin nehmen wir an, dass die Ableitungen $f_n'\colon D \to \mathbb{C}$ stetig sind und auf D gleichmäßig konvergieren.*

Dann ist auch die Grenzfunktion f auf D holomorph, und für ihre Ableitung gilt $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$. Differentiation und Grenzwertbildung können in diesem Fall also vertauscht werden.

Beweis. Für reelle Funktionen ist die analoge Aussage bereits aus den Grundlagen der Mathematik bekannt [G2, Satz 10.27]. Wir führen den Beweis nun in $\mathbb{C}$, indem wir ihn auf den reellen Fall zurückführen.

Dazu schreiben wir $f_n = u_n + \mathrm{i} v_n$ mit $u_n = \operatorname{Re} f_n$ und $v_n = \operatorname{Im} f_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Analog setzen wir $f = u + \mathrm{i} v$ für die Grenzfunktion. Die Koordinaten in D seien wie üblich $z = x + \mathrm{i} y$.

Betrachten wir nun die Funktionen u_n und fassen sie bei festgehaltenem y als Funktionen einer reellen Variablen x auf, so können wir auf diese Funktionen offensichtlich die *reelle* Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung anwenden und sehen, dass u nach x partiell differenzierbar ist mit $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}$. Da wir außerdem vorausgesetzt haben, dass die Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ stetig sind und gleichmäßig gegen $\frac{\partial u}{\partial x}$ konvergieren, ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ darüber hinaus nach [G2, Bemerkung 24.25 (b)] stetig. Also ist $f = u + \mathrm{i} v \colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar und damit nach [G2, Satz 25.17] auch total differenzierbar.

Außerdem sind alle f_n nach Voraussetzung holomorph und erfüllen somit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9, d. h. es gilt $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial y}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y} = -\frac{\partial v_n}{\partial x}$ für alle n. Damit folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und analog $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Also erfüllt auch f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist somit nach Satz 2.9 holomorph mit Ableitung

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v_n}{\partial x}\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'. \qquad \square$$

06

Folgerung 7.6 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)**.** *Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ist in ihrem Konvergenzkreis holomorph. Ihre Ableitung stimmt dort mit der formalen Ableitung überein, d. h. es gilt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$.*

Beweis. Nach Bemerkung 7.4 haben die ursprüngliche Potenzreihe f und ihre formale Ableitung $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ denselben Konvergenzradius r. Es sei nun $R < r$ beliebig; nach Bemerkung 7.2 konvergieren beide Potenzreihen dann sogar gleichmäßig auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le R\}$ und damit natürlich auch auf $D := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$. Anwenden von Satz 7.5 auf die Partialsummen von f bzw. g liefert damit die behauptete Aussage auf D. Da $R < r$ beliebig war, folgt die Behauptung dann auch auf dem gesamten Konvergenzkreis. $\square$

Beispiel 7.7. Wir betrachten noch einmal die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$ aus Beispiel 7.3 (a). Nach Folgerung 7.6 ist f im Konvergenzkreis $D = \{z : |z-1| < 1\}$ holomorph mit Ableitung

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

Wir kennen nach Aufgabe 3.13 (a) aber schon eine weitere Funktion auf D, deren Ableitung $\frac{1}{z}$ ist, nämlich den komplexen Logarithmus $\log z$. Die Funktion $z \mapsto f(z) - \log z$ ist also holomorph mit Ableitung 0 in D. Aus Folgerung 5.11 (a) ergibt sich damit, dass $f(z) - \log z$ auf D konstant ist. Einsetzen von $z = 1$ zeigt, dass diese Konstante 0 sein muss. Damit ist $f(z) = \log z$ auf D.

Man beachte hierbei insbesondere, dass der Logarithmus zwar auf dem viel größeren Gebiet $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\le 0}$ definiert und holomorph ist, aber nur im Kreis D (bzw. evtl. noch an einigen Punkten auf ∂D) durch die Potenzreihe f dargestellt wird!

Wir können Folgerung 7.6 nun natürlich sofort auf die höheren (komplexen) Ableitungen $f^{(n)}$ einer Potenzreihe f verallgemeinern:

Folgerung 7.8 (Taylor-Formel für Potenzreihen)**.** *Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzkreis D. Dann ist f auf D beliebig oft komplex differenzierbar, und alle Ableitungen* *können gliedweise berechnet werden. Weiterhin gilt* $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ *für alle n und damit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n \qquad \textit{(\textbf{Taylor-Formel})}$$

für alle $z \in D$*.*

Beweis. Durch iterierte Anwendung von Folgerung 7.6 ergibt sich sofort, dass alle höheren Ableitungen von f existieren und gliedweise berechnet werden können. Führt man diese Differentiationen aus, so erhält man für alle $k \in \mathbb{N}$

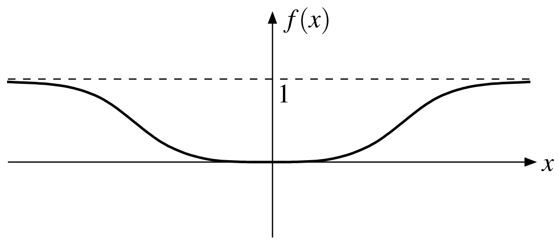
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n(z-z_0)^{n-k},$$

durch Einsetzen von $z = z_0$ also $f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k$ und damit $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. □

Bemerkung 7.9 (Analytische Funktionen)**.** Die Taylor-Formel aus Folgerung 7.8 gilt genauso auch im Reellen [G2, Satz 11.9]. Sie ist allerdings zunächst nur eine Aussage über *Potenzreihen* und nicht über (unendlich oft) *differenzierbare Funktionen*. In der Tat gibt es im Reellen unendlich oft differenzierbare Funktionen, die sich nicht als Potenzreihe schreiben lassen und für die demzufolge insbesondere auch die Taylor-Formel aus Folgerung 7.8 nicht gilt: So ist z. B. die reelle Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Aufgabe 2.18 (a) unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n [G2, Aufgabe 11.13]. Die Funktion läuft sozusagen „unendlich flach in den Nullpunkt hinein“, d. h. die entsprechende Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$ ist die Nullfunktion und damit nicht gleich der ursprünglichen Funktion f.



Funktionen, die sich (lokal) als Potenzreihe schreiben lassen (und für die demzufolge die Taylor-Formel gilt), werden in der Literatur als **analytische Funktionen** bezeichnet. Die analytischen Funktionen bilden also im Reellen nach dem obigen Beispiel eine echte Teilmenge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

Im Komplexen hingegen funktioniert das obige Gegenbeispiel nicht, weil die Funktion $z \mapsto e^{-\frac{1}{z^2}}$ dort nach Aufgabe 2.18 (a) nicht einmal stetig in den Nullpunkt fortsetzbar ist. In der Tat wird der folgende Satz wie bereits angekündigt zeigen, dass die komplexe Situation hier wieder einmal viel schöner als die reelle ist: In der Funktionentheorie ist *jede* holomorphe Funktion automatisch analytisch, also in eine Potenzreihe entwickelbar! Dies ist natürlich sehr angenehm, weil es sich mit Potenzreihen oft viel einfacher rechnen lässt als mit dem allgemeinen Konzept einer differenzierbaren Funktion.

Satz 7.10 (Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen)**.** *Es seien* $D \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion. Ferner seien* $z_0 \in D$ *und* $r > 0$*, so dass der offene Kreis* $U = \{z : |z - z_0| < r\}$ *mit Mittelpunkt* z_0 *und Radius r ganz in D liegt. Dann gilt:*

(a) *f ist in U darstellbar als eine Potenzreihe um* z_0 *(deren Konvergenzradius mindestens r ist). Insbesondere ist f in U nach Folgerung 7.6 also unendlich oft komplex differenzierbar, und* *es gilt die Taylor-Formel*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

für alle $z \in U$.

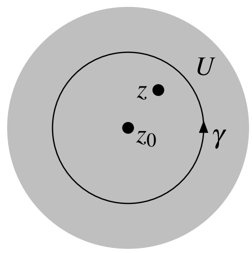
(b) *Die höheren Ableitungen von f erfüllen die* ***verallgemeinerte Cauchysche Integralformel***

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei γ eine beliebige Kreislinie in U um z_0 ist.

Beweis. Es seien $z \in U$ und γ wie im Bild unten rechts eine Kreislinie mit Mittelpunkt z_0, die um den Punkt z herumläuft und noch ganz in U liegt. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel aus Satz 6.7

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\, dw.$$



Weil für alle w auf dem Integrationsweg $|w - z_0| > |z - z_0|$ gilt und der Betrag von $\frac{z-z_0}{w-z_0}$ damit dort kleiner als 1 ist, können wir den zweiten Faktor im Integral in die geometrische Reihe entwickeln und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw.$$

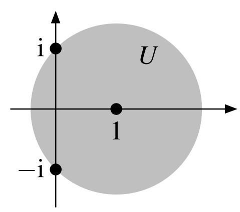
Wenn w auf dem Integrationsweg entlang läuft, ist der Ausdruck $\frac{f(w)}{w-z_0}$ beschränkt, und $\frac{z-z_0}{w-z_0}$ hat einen konstanten Betrag kleiner als 1. Daher ist die Reihe im Integranden gleichmäßig konvergent in w. Wir können die Summe also mit dem Integral vertauschen [G2, Satz 12.37] und erhalten

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z-z_0)^n.$$

Weil der Ausdruck in der großen Klammer unabhängig von z ist, haben wir f damit in der Tat auf U als Potenzreihe in z um z_0 geschrieben. Da die Koeffizienten der Potenzreihe nach Folgerung 7.8 außerdem gleich $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ sein müssen, ist damit auch die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel bewiesen. □

Beispiel 7.11. Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{\pm \mathrm{i}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$$



und den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$. Der größte offene Kreis mit Mittelpunkt z_0, der noch im Definitionsgebiet von f liegt, ist offensichtlich $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\}$. Also konvergiert die Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ nach Satz 7.10 auf U gegen f, d. h. ihr Konvergenzradius ist mindestens $\sqrt{2}$.

Andererseits kann der Konvergenzradius aber auch nicht größer als $\sqrt{2}$ sein, denn sonst würden die Punkte $\pm\mathrm{i}$ noch im Inneren des Konvergenzkreises liegen — was bedeuten würde, dass die Taylor-Reihe (die ja auf U mit f übereinstimmt) die Funktion f auf U in die Punkte $\pm\mathrm{i}$ stetig fortsetzen würde. Dies ist wegen $\lim_{z\to\pm\mathrm{i}} f(z) = \infty$ aber natürlich unmöglich. Also ist der Konvergenzradius der Taylor-Reihe genau gleich $\sqrt{2}$. Beachte, dass wir hier den Konvergenzradius der Taylor-Reihe bestimmen konnten, ohne die Reihe überhaupt explizit hingeschrieben zu haben!

Bemerkung 7.12. Aufgrund der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (siehe Folgerung 5.3 (a)) können wir den Integrationsweg in der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel von Satz 7.10 (b) natürlich genauso gut durch einen in $D\backslash\{z_0\}$ homotopen Weg ersetzen. Insbesondere kommt es bei der Integration über eine Kreislinie also nicht darauf an, dass z_0 wirklich der Mittelpunkt der Kreislinie ist, sondern nur darauf, dass z_0 im Inneren des Kreises liegt. Wir können die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel also auch analog zur „gewöhnlichen“ in Satz 6.7 aufschreiben als

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw,$$

wobei $K \subset D$ ein (abgeschlossener) Kreis und $z \in \overset{\circ}{K}$ ein beliebiger Punkt im Inneren dieses Kreises ist. Unsere ursprüngliche Cauchysche Integralformel ergibt sich hieraus offensichtlich für den Fall $n = 0$.

In dieser Form sieht man also, dass diese Formel nicht nur die Funktionswerte, sondern auch alle Ableitungen von f im Inneren eines Kreises berechnen kann, wenn man nur die Werte von f auf dem Rand des Kreises kennt. Wie in Beispiel 6.9 (b) ist dieses Resultat oft zur Berechnung geschlossener Wegintegrale nützlich: Wollen wir z. B. das Integral

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2}\, dz$$

berechnen, so folgt mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel für $n = 1$ und $f(z) = e^z$ ohne weitere komplizierte Rechnungen

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0) = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i,$$

da die Nullstelle 0 des Nenners im Inneren des Integrationskreises liegt.

Aufgabe 7.13. Berechne die Integrale $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)}\, dz$ und $\displaystyle\int_{|z|=1} z^3\, e^{\frac{1}{z}}\, dz$.

Aufgabe 7.14. Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) die Taylor-Reihe der Funktion $f(z) = \frac{2}{z^5-1}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = \frac{1}{4}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\, z^n$, wobei

$$\varphi(n) := |\, \{m = 1, \dots, n : m \text{ ist teilerfremd zu } n\}\, |$$

die z. B. aus der Zahlentheorie bekannte Eulersche φ-Funktion ist;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^{(n^2)}$.

Aufgabe 7.15. Es sei p ein komplexes Polynom vom Grad $d \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, z^n$.

(b) Zeige, dass sich f im Konvergenzkreis in der Form $f(z) = \frac{g(z)}{(1-z)^{d+1}}$ für ein Polynom g schreiben lässt.

Aufgabe 7.16. Für $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ und $a \in \mathbb{C}$ definieren wir die **(allgemeine) komplexe Potenz** analog zum reellen Fall als

$$z^a := e^{a \log z}$$

mit dem komplexen Logarithmus $\log z$ wie in Aufgabe 3.13.

(a) Beweise für $|z| < 1$ die „allgemeine binomische Formel“

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n,$$

wobei $\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

(b) Ihr seid Übungsleiter für die Funktionentheorie und bekommt die folgende Abgabe eines Studenten. Was sagt ihr dazu?

Einerseits ist
$$(\mathrm{e}^{2+2\pi\mathrm{i}})^{2+2\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{2+2\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^2)^{2+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{4+4\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^4,$$
andererseits aber auch
$$(\mathrm{e}^{2+2\pi\mathrm{i}})^{2+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{(2+2\pi\mathrm{i})^2} = \mathrm{e}^{4+8\pi\mathrm{i}-4\pi^2} = \mathrm{e}^4 \cdot \mathrm{e}^{-4\pi^2},$$
also folgt $\mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^4 \cdot \mathrm{e}^{-4\pi^2}$ *und damit* $\mathrm{e}^{-4\pi^2} = 1$.

Aufgabe 7.17. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen mit $0 \in D$. Zeige, dass es keine holomorphe Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}$ gibt mit $f^{(n)}(0) = n!^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.