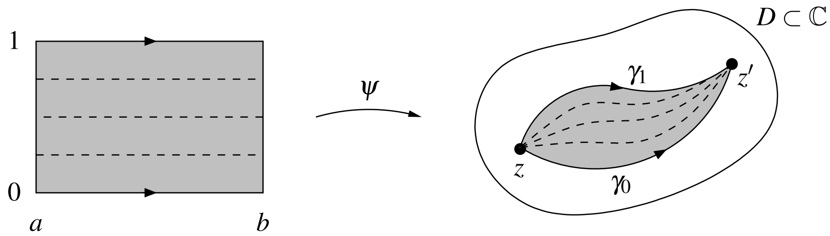
5. Homotopie von Wegen

In der Praxis wird der Cauchysche Integralsatz meistens in einer äquivalenten Umformulierung verwendet, die wir nun genauer behandeln wollen. Anschaulich besagt sie, dass *Wegintegrale* $\int_\gamma f(z)\,dz$ *ihren Wert nicht ändern, wenn man den Weg* γ *innerhalb des Bereiches deformiert, in dem* f *holomorph ist.* Um eine solche Aussage mathematisch exakt formulieren zu können, müssen wir natürlich zunächst einmal definieren, was wir unter einer „Deformation eines Weges" genau verstehen wollen. Der korrekte mathematische Begriff hierfür ist die sogenannte Homotopie. Dieses Konzept stammt eigentlich aus der Topologie und wird normalerweise für lediglich *stetige* Wege formuliert; wie üblich werden wir uns in dieser Vorlesung aber nur mit *stückweise stetig differenzierbaren* Wegen befassen. Da wir in Bemerkung 3.7 bereits gesehen haben, dass sich jeder solche Weg sogar zu einem *stetig differenzierbaren* Weg umparametrisieren lässt, wollen wir uns hier auf solche stetig differenzierbaren Wege beschränken.

Definition 5.1 (Homotopie)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ zwei stetig differenzierbare Wege in D (mit gleichem Startintervall).

(a) (Relative Homotopie) Haben γ_0 und γ_1 den gleichen Anfangspunkt $z := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und den gleichen Endpunkt $z' := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, so heißen γ_0 und γ_1 **homotop** (oder genauer: **homotop relativ** zu den Endpunkten $\{a,b\}$ des Intervalls) in D, wenn es wie im folgenden Bild eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi\colon [a,b] \times [0,1] \to D$ gibt mit

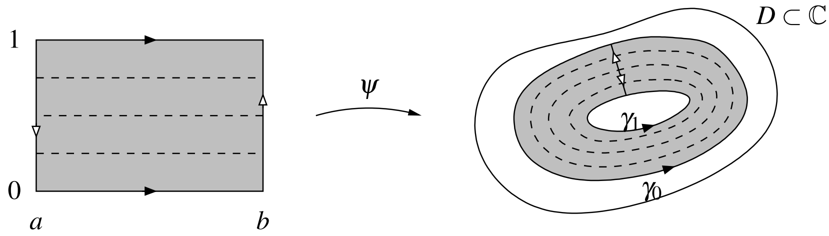
- $\psi(t,0) = \gamma_0(t)$ und $\psi(t,1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a,b]$ (d. h. die untere Rechteckseite ist der Weg γ_0 und die obere der Weg γ_1);
- $\psi(a,s) = z$ und $\psi(b,s) = z'$ für alle $s \in [0,1]$ (d. h. die linke Rechteckseite wird konstant auf z und die rechte konstant auf z' abgebildet).



Anschaulich sind γ_0 und γ_1 also homotop, wenn sich γ_0 innerhalb von D und unter Festhaltung der Endpunkte nach γ_1 deformieren lässt: Betrachtet man für $s \in [0,1]$ die Wege $\gamma_s\colon [a,b] \to D$ mit $\gamma_s(t) = \psi(t,s)$, so ändert sich γ_0 langsam in γ_1, wenn man s von 0 nach 1 laufen lässt. (In dem Bild oben sind drei der Zwischenwege $\gamma_{1/4}$, $\gamma_{1/2}$, $\gamma_{3/4}$ gestrichelt eingezeichnet.) Man bezeichnet die Abbildung ψ auch als **Homotopie** von γ_0 nach γ_1.

(b) (Freie Homotopie) Sind γ_0 und γ_1 geschlossen (mit nicht notwendig gleichem Anfangs- bzw. Endpunkt), so heißen γ_0 und γ_1 **homotop** (oder genauer: **frei homotop**) in D, wenn es wie im folgenden Bild eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi\colon [a,b] \times [0,1] \to D$ gibt mit

- $\psi(t,0) = \gamma_0(t)$ und $\psi(t,1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a,b]$ (d. h. wie oben ist die untere Rechteckseite der Weg γ_0 und die obere der Weg γ_1);
- $\psi(a,s) = \psi(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$ (d. h. jeder Punkt der linken Rechteckseite wird in D auf den gleichen Punkt wie der entsprechende Punkt der rechten Rechteckseite abgebildet).



Anschaulich sind γ_0 und γ_1 also homotop, wenn sich γ_0 innerhalb von D als geschlossener Weg nach γ_1 deformieren lässt: Betrachtet man wieder für $s \in [0,1]$ die Wege $\gamma_s \colon [a,b] \to D$ mit $\gamma_s(t) = \psi(t,s)$, so sind alle γ_s geschlossene Wege in D, die sich für s von 0 bis 1 langsam von γ_0 nach γ_1 ändern. Auch hier wird die Abbildung ψ als Homotopie von γ_0 nach γ_1 bezeichnet.

(c) Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar** in D, wenn er (frei) homotop zu einem konstanten Weg ist, d. h. anschaulich wenn er sich „in D zu einem Punkt zusammenziehen lässt".

Bemerkung 5.2.

(a) Sind die Wege γ_0 und γ_1 in Definition 5.1 geschlossen mit gleichem Anfangspunkt (gilt also $\gamma_0(a) = \gamma_0(b) = \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$), so ist sowohl Teil (a) als auch Teil (b) der Definition anwendbar. In diesem Fall kann man zeigen, dass γ_0 und γ_1 genau dann homotop relativ $\{a,b\}$ sind, wenn sie frei homotop sind. Es führt also nicht zu Missverständnissen, wenn wir im Folgenden einfach von „homotopen Wegen" reden, sobald eine der beiden Definitionen anwendbar ist.

(b) Wie bereits erwähnt verlangt man in der Topologie von einer Homotopieabbildung lediglich die Stetigkeit [G3, Kapitel 6]. Für Wege in einer *offenen* Teilmenge von $\mathbb{C}$ (wie in Definition 5.1 vorausgesetzt) kann man jedoch zeigen, dass unser Homotopiebegriff mit dem über stetige Funktionen definierten übereinstimmt.

Da wir diese beiden Aussagen im Folgenden nicht benötigen, werden wir sie hier auch nicht beweisen. Sie sollen uns nur zeigen, dass unsere Definition 5.1 mit der sonst üblichen verträglich und nicht mehrdeutig ist.

Kombinieren wir den Cauchyschen Integralsatz 4.1 mit unserer Definition, erhalten wir unmittelbar die folgende Aussage.

Folgerung 5.3 (Homotopieinvarianz des Wegintegrals)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to D$ zwei Wege in D.*

(a) *Sind γ_0 und γ_1 (relativ oder frei) homotop in D, so gilt $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$.*

(b) *Ist γ_0 (geschlossen und) zusammenziehbar in D, so gilt $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Cauchyschen Integralsatz 4.1 angewendet auf die Homotopieabbildung ψ aus Definition 5.1: Im Fall der relativen Homotopie verschwindet das Wegintegral über f entlang der seitlichen Rechteckkanten, da diese konstant auf einen Punkt abgebildet werden. Im Fall der freien Homotopie ist die Summe der Wegintegrale über f entlang der seitlichen Rechteckkanten Null nach Bemerkung 3.6, da die beiden Kanten den gleichen Weg mit entgegengesetzter Orientierung beschreiben. In beiden Fällen folgt also aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass die Integrale entlang der oberen und unteren Rechteckkante (bei korrekter Orientierung) gleich sein müssen, also dass wie in (a) behauptet $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ gilt. Die Aussage (b) folgt natürlich sofort aus (a), da das Integral über einen konstanten Weg 0 ist. □ 04

Beispiel 5.4. Es sei $D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ferner seien

$$\gamma_0 \colon [0,2\pi] \to D,\ t \mapsto r\,e^{\mathrm{i}t} \quad \text{und} \quad \gamma_1 \colon [0,2\pi] \to D,\ t \mapsto z_0 + r\,e^{\mathrm{i}t}$$

zwei Kreislinien mit Radius r und Mittelpunkt 0 bzw. z_0. Damit das Bild von γ_1 auch wirklich in D liegt, setzen wir dabei $|z_0| \neq r$ voraus. Wir können dann zwei Fälle unterscheiden:

(a) Ist $|z_0| < r$, enthält der Weg γ_1 also den Nullpunkt in seinem Inneren (siehe Bild unten links), so sind γ_0 und γ_1 (frei) homotop in D mit der Homotopieabbildung

$$\psi\colon [0,2\pi]\times[0,1] \to D,\ (t,s) \mapsto sz_0 + re^{\mathrm{i}t}.$$

Das Bild von ψ liegt nämlich in der Tat in D (enthält also nicht den Nullpunkt), da

$$|\psi(t,s)| = |sz_0 + re^{\mathrm{i}t}| \geq |re^{\mathrm{i}t}| - |sz_0| \geq r - |z_0| > 0$$

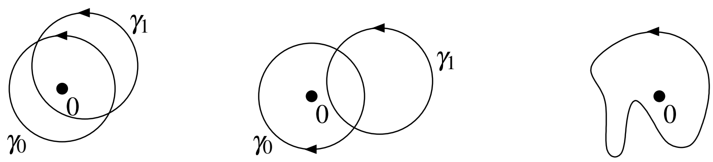
für alle $t \in [0,2\pi]$ und $s \in [0,1]$; und es ist offensichtlich, dass ψ stetig differenzierbar ist und die geforderten Randbedingungen erfüllt: Es ist $\psi(t,0) = re^{\mathrm{i}t} = \gamma_0(t)$, $\psi(t,1) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$ und $\psi(0,s) = sz_0 + r = \psi(2\pi,s)$ für alle $t \in [0,2\pi]$ und $s \in [0,1]$.

(b) Ist dagegen $|z_0| > r$, enthält γ_1 also nicht den Nullpunkt in seinem Inneren (wie im Bild unten in der Mitte), so gilt für die auf D holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ nach Beispiel 4.3

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = 0 \neq 2\pi\mathrm{i} = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z}\,dz.$$

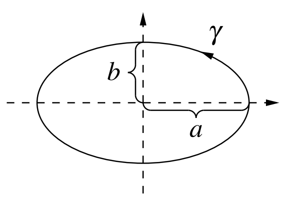
Aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals gemäß Folgerung 5.3 folgt also, dass γ_0 und γ_1 in D nicht (frei) homotop sein können.

Natürlich ist auch ohne Rechnung einleuchtend, dass man γ_0 in diesem Fall nicht innerhalb von D, also ohne den Nullpunkt zu treffen, nach γ_1 deformieren kann. Letztlich liegt das daran, dass der Weg γ_0 einmal um den Nullpunkt herum läuft, während γ_1 dies nicht tut: Anschaulich ist ein geschlossener Weg in D genau dann zur Kreislinie γ_0 deformierbar, wenn er (entgegen dem Uhrzeigersinn) einmal um den Nullpunkt herum läuft, wie z. B. im Bild unten rechts. Wir werden dieses Konzept der „Umlaufzahlen" in Kapitel 11 noch genauer untersuchen.



Wir sehen an diesem Beispiel aber auch schon, dass der Homotopiebegriff sehr wesentlich von der betrachteten Menge D abhängt: So sind z. B. im Fall $D = \mathbb{C}$, wenn wir die Kurven also auch über den Nullpunkt ziehen dürfen, die obigen Kreislinien γ_0 und γ_1 für jeden beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ homotop in D — und zwar mit der gleichen Homotopie wie in (a).

Aufgabe 5.5. Es sei γ wie in der Skizze der Weg, der einmal entgegen dem Uhrzeigersinn entlang des Randes einer Ellipse mit Halbachsen a und b läuft.



Beweise ohne Verwendung von Stammfunktionen die Formel

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab},$$

indem du das Wegintegral $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ sowohl nach Definition als auch mit Hilfe der Homotopieinvarianz berechnest. Wie sehen die benutzten Homotopien konkret aus?

Das Integral mit Stammfunktionen auszurechnen wäre in diesem Fall zwar prinzipiell möglich, aber sehr aufwändig. Wir sehen hier also ein erstes Beispiel dafür, wie sich reelle Integrale mit Hilfe der Funktionentheorie manchmal viel einfacher berechnen lassen. Einige weitere Beispiele hierfür werden wir in Kapitel 12 untersuchen.

Aufgabe 5.6. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma\colon [a,b] \to D$ ein stetig differenzierbarer Weg in D. Ferner sei $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to D$ ein Weg, der wie in Bemerkung 3.6 durch eine „orientierungserhaltende Umparametrisierung" aus γ entsteht, d. h. es gebe eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi\colon [a,b] \to [a,b]$ mit $\psi(a) = a$ und $\psi(b) = b$, so dass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$.

Zeige, dass γ und $\tilde{\gamma}$ dann homotop in D sind. (Dieselbe Aussage gilt analog auch für die freie Homotopie geschlossener Wege. Für holomorphe Funktionen folgt die Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung des Weges also auch aus der Homotopieinvarianz.)

Besonders einfach wird die Aussage der Homotopieinvarianz des Wegintegrals natürlich, wenn die Menge $D \subset \mathbb{C}$ so beschaffen ist, dass zwei *beliebige* geschlossene Wege (bzw. zwei beliebige Wege mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt) immer homotop sind. Hierzu definiert man die folgenden beiden Begriffe:

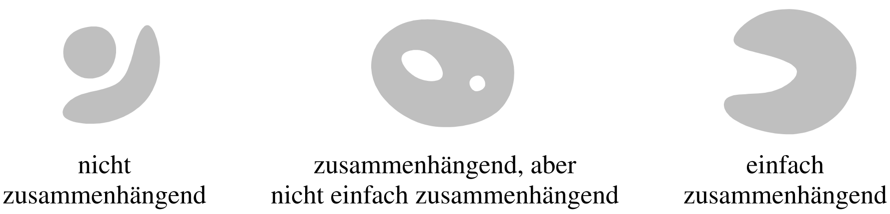
Definition 5.7 (Zusammenhang)**.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) D heißt **zusammenhängend** oder ein **Gebiet**, wenn es zu je zwei Punkten $z, z' \in D$ einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to D$ gibt mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = z'$.

(b) D heißt **einfach zusammenhängend**, wenn D zusammenhängend und jeder geschlossene Weg in D zusammenziehbar ist.

Bemerkung 5.8. In der Topologie wird ein Raum M mit der Eigenschaft aus Definition 5.7 (a) in der Regel als *wegzusammenhängend* bezeichnet, während der Begriff „zusammenhängend" für eine andere Eigenschaft steht (nämlich dass sich M als topologischer Raum nicht auf nicht-triviale Art als disjunkte Vereinigung zweier in M offener Mengen schreiben lässt) [G3, Kapitel 3]. Man kann allerdings zeigen, dass diese beiden Eigenschaften für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ (also die Mengen, die uns in dieser Vorlesung interessieren) äquivalent sind [G3, Bemerkung 3.5].

Beispiel 5.9. Wie im folgenden Bild dargestellt, ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ genau dann zusammenhängend, wenn sie „nicht aus mehreren Teilen besteht", und genau dann einfach zusammenhängend, wenn sie außerdem „keine Löcher hat, um die man herumlaufen könnte".

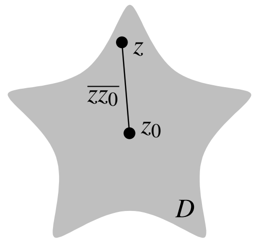


In der Tat ist die Homotopie ja ein sehr anschauliches Konzept — von zwei Wegen in einer gegebenen Menge lässt sich in der Regel schon durch einfaches Hinschauen leicht entscheiden, ob sie homotop zueinander sind oder nicht. Wir werden die Homotopie zweier Wege daher in dieser Vorlesung ab jetzt in der Regel nur noch anschaulich begründen. Wer einen exakten Beweis für derartige Aussagen haben möchte, muss nur die entsprechenden Homotopien wie in Beispiel 5.4 konkret hinschreiben.

Es gibt jedoch einen in der Praxis häufig auftretenden Fall, in dem man die Eigenschaften aus Definition 5.7 auch leicht exakt beweisen kann:

Beispiel 5.10 (Sternförmige Mengen)**.** Eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt **sternförmig**, falls es wie im Bild unten rechts ein $z_0 \in D$ gibt, so dass für alle $z \in D$ auch die ganze Verbindungsstrecke

$$\overline{zz_0} = \{(1-t)\,z + t\,z_0 : t \in [0,1]\}$$



von z nach z_0 in D liegt. Eine solche sternförmige Menge ist stets einfach zusammenhängend: Zum einen lassen sich zwei Punkte $z, z' \in D$ immer durch einen Weg in D verbinden (auf je einem geraden Weg von z nach z_0 und dann von z_0 nach z'), und zum anderen ist jeder geschlossene Weg $\gamma\colon [a,b] \to D$ mit der Homotopie

$$\psi\colon [a,b] \times [0,1] \to D,\ (t,s) = (1-s)\,\gamma(t) + sz_0$$

zusammenziehbar, die jeden Punkt des Weges auf einer geraden Strecke nach z_0 bewegt.

Ein Spezialfall solcher sternförmiger Mengen sind die sogenannten *konvexen Mengen*, die mit zwei beliebigen ihrer Punkte auch stets die ganze Verbindungsstrecke dazwischen enthalten. In diesem Fall können wir einen beliebigen Punkt der Menge als „Sternmittelpunkt“ z_0 wählen.

Aus den Zusammenhangseigenschaften in Definition 5.7 ergeben sich für uns die folgenden wichtigen Konsequenzen.

Folgerung 5.11. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(a) *Ist D zusammenhängend und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist f konstant.*

(b) *Ist D einfach zusammenhängend, so hängen Wegintegrale über f nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Insbesondere gilt dann also $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ.*

Beweis.

(a) Es seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig; zu zeigen ist $f(z_1) = f(z_2)$. Nach Voraussetzung gibt es einen Weg γ von z_1 nach z_2. Dann gilt wie gewünscht nach Lemma 3.10

$$0 = \int_\gamma f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1).$$

(b) Es seien γ und γ' zwei Wege, die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt haben. Wir betrachten den geschlossenen Weg $\tilde{\gamma}$, der zuerst γ und danach γ' in umgekehrter Richtung durchläuft (nach Bemerkung 3.7 können wir auch annehmen, dass $\tilde{\gamma}$ stetig differenzierbar ist). Da D einfach zusammenhängend ist, ist $\tilde{\gamma}$ zusammenziehbar. Also ergibt sich mit Folgerung 5.3 (b)

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma'} f(z)\,dz. \qquad \square$$