

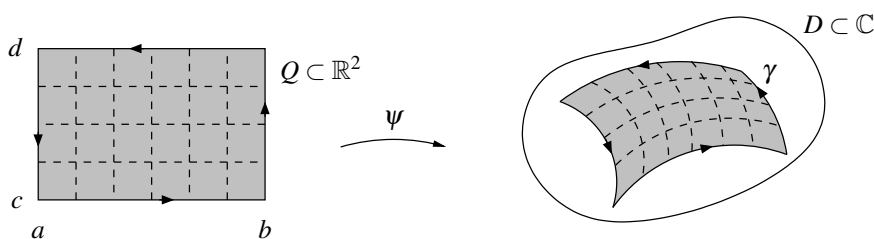
## 4. Der Cauchysche Integralsatz

Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Hat  $f$  in  $D$  eine Stammfunktion, so haben wir im letzten Kapitel gesehen, dass Kurvenintegrale über  $f$  in  $D$  nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen bzw. dass Integrale über  $f$  entlang geschlossener Wege in  $D$  gleich Null sind. Wir konnten jedoch noch kein zufriedenstellendes Kriterium dafür angeben, wann  $f$  eine solche Stammfunktion besitzt. Daher wollen wir in diesem und dem nächsten Kapitel ein einfach nachprüfbares hinreichendes Kriterium für diese Wegunabhängigkeit des Integrals beweisen. Dies ist für die Berechnung von Integralen natürlich sehr nützlich, da wir in diesem Fall den gegebenen Integrationsweg durch einen anderen Weg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ersetzen können, für den die Berechnung unter Umständen einfacher wird.

Der zentrale Satz, den wir hierfür benötigen, ist der sogenannte Cauchysche Integralsatz. Er besagt anschaulich, dass ein Kurvenintegral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  entlang eines geschlossenen Weges  $\gamma$  Null ist, wenn  $f$  auf der ganzen von  $\gamma$  eingeschlossenen Fläche holomorph ist. Leider ist der Begriff der „von einer geschlossenen Kurve eingeschlossenen Fläche“ — so anschaulich er auch sein mag — mathematisch jedoch nur sehr schwer zu definieren. Wir beschränken uns daher zunächst auf den Fall, in dem  $\gamma$  das Bild des Randes  $\partial Q$  eines Quaders  $Q$  unter einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\psi$  ist (und unter der eingeschlossenen Fläche dann das Bild von  $Q$  unter  $\psi$  zu verstehen ist). Da Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen in der Regel nur auf *offenen* Definitionsmengen definiert ist, wollen wir dabei unter einer stetig differenzierbaren Abbildung auf dem kompakten Quader  $Q$  der Einfachheit halber eine Abbildung auf  $Q$  verstehen, die stetig differenzierbar auf eine offene Umgebung von  $Q$  fortgesetzt werden kann — dies wird bei uns in der Praxis immer der Fall sein.

**Satz 4.1 (Cauchyscher Integralsatz).** *Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Ferner seien  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Quader,  $\psi: Q \rightarrow D$  eine stetig differenzierbare Abbildung, und  $\gamma = \psi(\partial Q)$  das Bild der Randkurve von  $Q$  unter  $\psi$ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



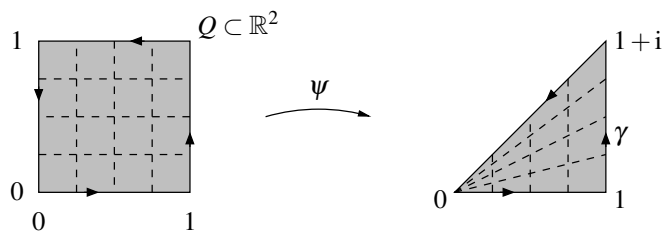
Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir uns seine Aussage etwas genauer anschauen.

**Beispiel 4.2.** Wir haben oben ja schon erwähnt, dass es im Cauchyschen Integralsatz nicht wirklich darauf ankommt, dass die Bildkurve aus dem Rand eines Quaders entsteht. In der Tat finden sich in der Literatur zahlreiche Versionen des Cauchyschen Integralsatzes für verschiedenste Integrationswege — Dreiecke, Bilder von Dreiecken unter stetigen Abbildungen, Kreislinien und vieles mehr. Ihnen allen ist gemeinsam, dass es sich um Wege handelt, bei denen „die von ihnen eingeschlossene Fläche“ einfach definierbar ist, und dass der Integrand auf dieser gesamten Fläche (und nicht nur auf dem Integrationsweg selbst) als holomorph vorausgesetzt werden muss. Die folgenden Beispiele zeigen, dass unser Satz 4.1 bereits auf „nahezu beliebige“ derartige geschlossene Integrationswege anwendbar ist:

- (a) (Dreiecke) Wir betrachten die Abbildung

$$\psi: Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \psi(t, s) = t + ist.$$

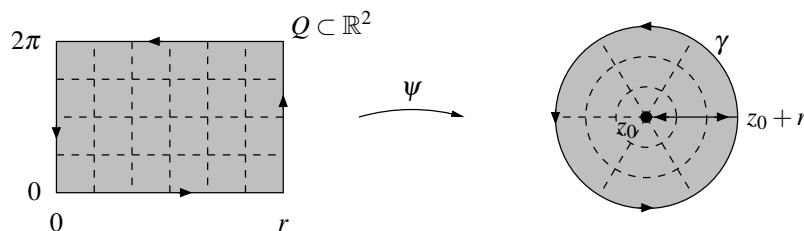
Dann wird die Unterkante des Quaders, also die Punkte  $(t, s)$  mit  $s = 0$  und  $0 \leq t \leq 1$ , genau auf das Geradenstück von 0 bis 1 in der komplexen Ebene abgebildet. Genauso wird die rechte Kante auf das Geradenstück von 1 nach  $1 + i$  und die obere auf das Geradenstück von  $1 + i$  nach 0 abgebildet. Die linke Kante des Quaders, also die Punkte mit  $t = 0$ , werden von  $\psi$  alle auf 0 abgebildet, so dass diese Kante im Bild verschwindet. Insgesamt ist das Bild  $\gamma = \psi(\partial Q)$  der Randkurve des Quaders also genau das im Bild unten rechts eingezeichnete Dreieck. Man sieht leicht, dass auch das Innere des Quaders  $Q$  genau auf das Innere dieses Dreiecks abgebildet wird.



Natürlich kann man analog auch andere Dreiecke in der komplexen Ebene erzeugen. Wir sehen mit Satz 4.1 also, dass „der Cauchysche Integralsatz auch für Dreiecke gilt“, d. h. dass Wegintegrale über Dreieckswege gleich Null sind, wenn die zu integrierende Funktion auf diesem gesamten Dreieck (also auch im Inneren) holomorph ist.

- (b) (Kreise) Wir betrachten für
- $z_0 \in \mathbb{C}$
- und
- $r \in \mathbb{R}_{>0}$
- die stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi: [0, r] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, (t, s) \mapsto z_0 + t e^{is}.$$

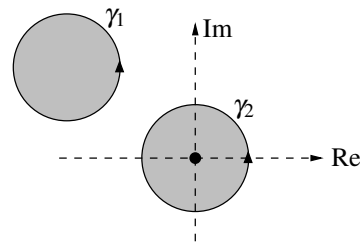


Hier wird (wie im Bild oben) die rechte Kante des Quaders auf die Kreislinie  $\gamma$  um  $z_0$  mit Radius  $r$  abgebildet, die linke auf den Punkt  $z_0$ , und die beiden horizontalen Kanten auf die Strecke von  $z_0$  nach  $z_0 + r$  in entgegengesetzten Richtungen (so dass sich die entsprechenden Integrale wieder wegheben). Der Cauchysche Integralsatz gilt also auch für Kreislinien: Es ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , wenn der Kreis  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$  komplett in dem Bereich liegt, in dem  $f$  holomorph ist.

- (c) Da die Verkettung stetig differenzierbarer Abbildungen wieder stetig differenzierbar ist, sehen wir mit den obigen Beispielen, dass der Cauchysche Integralsatz auch für stetig differenzierbare Bilder von Dreiecken und Kreisen gilt — also für „nahezu beliebige“ Flächen bzw. deren Randkurven.

**Beispiel 4.3.** Wir betrachten wieder die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$ , die nach Satz 2.11 natürlich in ihrem Definitionsbereich  $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph ist. Ferner seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die im folgenden Bild rechts unten eingezeichneten Integrationswege.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 4.1 (bzw. Beispiel 4.2 (b)) ist  $\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$ , denn die von  $\gamma_1$  eingeschlossene Kreisfläche liegt ganz in dem Bereich  $D$ , in dem  $f$  holomorph ist. Für das Integral  $\int_{\gamma_2} f(z) dz$  hingegen sagt der Cauchysche Integralsatz nichts aus, denn hier liegt der Nullpunkt, in dem  $f$  ja nicht einmal definiert ist, im Inneren des von  $\gamma_2$  begrenzten Kreises. In der Tat haben wir in Beispiel 3.5 (a) ja auch gesehen, dass  $\int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \neq 0$  gilt.



Der Cauchysche Integralsatz ist unser erster „echter Satz“ der Funktionentheorie. Er ist absolut zentral für den weiteren Verlauf dieser Vorlesung. Glücklicherweise ist er aber auch nahezu der einzige Satz, bei dem wir wirklich in die reelle Analysis „absteigen“ und relativ komplizierte Abschätzungen vornehmen müssen. Alle weiteren Resultate der Funktionentheorie, die wir in diesem Skript behandeln werden, folgen dann relativ einfach Stück für Stück aus diesem Satz. Dies ist sicherlich auch einer der Hauptgründe dafür, dass die Funktionentheorie insgesamt sehr elegant und aufgeräumt wirkt.

03

Kommen wir nun aber endlich zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes. Wir werden den Beweis dadurch führen, dass wir den Betrag des gegebenen Kurvenintegrals nach oben durch einen Wert abschätzen, den wir letztlich gegen Null laufen lassen können. Für derartige Abschätzungen von Integralen benötigen wir zunächst zwei Lemmata. Das erste besteht aus zwei Resultaten, die wir sicher noch oft zur Abschätzung komplexwertiger Integrale verwenden werden.

**Lemma 4.4** (Integralabschätzungen). *Es seien  $a \leq b$  zwei reelle Zahlen.*

(a) (**Dreiecksungleichung für Integrale**) Für jede stetige Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

(b) (**Standardabschätzung für Wegintegrale**) Für das Wegintegral einer stetigen Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{C}$  über einen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)|$$

(beachte, dass  $|f \circ \gamma|$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig ist und das angegebene Maximum somit existiert [G2, Satz 8.25]).

*Beweis.*

(a) Wie jede komplexe Zahl können wir das Integral  $\int_a^b g(t) dt$  mit Hilfe von Polarkoordinaten als Betrag dieser Zahl multipliziert mit einer komplexen Zahl  $\lambda$  vom Betrag 1 schreiben. Es gibt also ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$  und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) dt \right| &= \lambda^{-1} \int_a^b g(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda^{-1} g(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(\lambda^{-1} g(t)) dt && \text{(Definition 3.3 (b))} \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda^{-1} g(t)) dt && \text{(Ausgangsintegral ist reell)} \\ &\leq \int_a^b |\lambda^{-1}| |g(t)| dt && \text{(Re } z \leq |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{C}) \\ &= \int_a^b |g(t)| dt. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

□

Als zweites brauchen wir für den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes 4.1 noch Aussagen darüber, wie sich Längen von Wegen und Abstände von Punkten unter der Abbildung  $\psi$  verändern.

**Lemma 4.5.** *Wie in Satz 4.1 seien  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Quader und  $\psi: Q \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit Komponentenfunktionen  $u = \operatorname{Re} \psi$  und  $v = \operatorname{Im} \psi$ .*

(a) *Bildet man den Rand des Quaders mit  $\psi$  ab, so gilt für die Länge dieses Weges die Abschätzung*

$$L(\psi(\partial Q)) \leq M \cdot L(\partial Q)$$

mit

$$M := \max\{|\psi'(w) \cdot z| : w \in Q, z \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|z\| = 1\},$$

wobei  $\psi'(w) \in \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$  und  $\psi'(w) \cdot z \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  damit als Matrixprodukt zu verstehen ist.

(b) *Für alle  $z_0, z \in Q$  gilt*

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| \leq N \cdot |z - z_0|$$

mit

$$N := 2 \max\{\|u'(w)\|, \|v'(w)\| : w \in Q\},$$

wobei  $u'(w), v'(w) \in \operatorname{Mat}(1 \times 2, \mathbb{R})$  und deren Norm als euklidische Norm aufzufassen ist.

*Beweis.* Beachte zunächst, dass die im Lemma angegebenen Maxima  $M$  und  $N$  als Maxima stetiger Funktionen auf kompakten Mengen existieren.

(a) Wir betrachten zunächst nur den unteren Rand des Quaders, den wir offensichtlich durch  $\gamma: [a, b] \rightarrow Q, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}$  parametrisieren können. Wegen  $\|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$  für alle  $t$  folgt dann

$$L(\psi(\gamma)) = \int_a^b |(\psi \circ \gamma)'(t)| dt = \int_a^b |\underbrace{\psi'(\gamma(t))}_{=: w \in Q} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=: z}| dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a) = M \cdot L(\gamma).$$

Genauso ergibt sich dies natürlich auch für die anderen drei Seiten des Quaders. Addieren wir diese vier Ungleichungen auf, so erhalten wir genau die Behauptung.

(b) Nach dem Mittelwertsatz für  $u$  [G2, Folgerung 26.17] gibt es einen Punkt  $w$  auf der geraden Strecke von  $z_0$  nach  $z$ , und damit insbesondere in  $Q$ , mit

$$\begin{aligned} |u(z) - u(z_0)| &= |u'(w) \cdot (z - z_0)| \\ &\leq \|u'(w)\| \cdot |z - z_0| \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung [G2, Satz 21.20]}) \\ &\leq \frac{N}{2} \cdot |z - z_0|. \end{aligned}$$

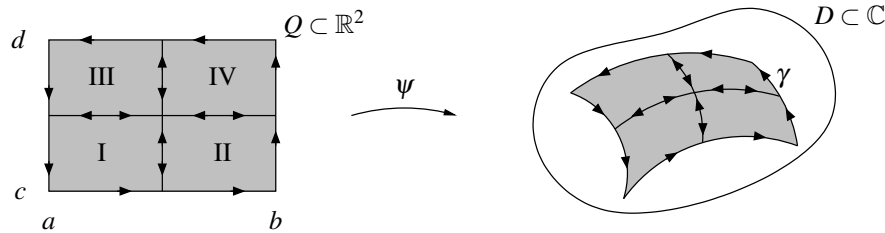
Genauso folgt dies natürlich für  $v$ , und damit nach der Dreiecksungleichung

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| \leq |u(z) - u(z_0)| + |i(v(z) - v(z_0))| \leq N \cdot |z - z_0|. \quad \square$$

**Bemerkung 4.6.** In den Ausdrücken für  $M$  und  $N$  in Lemma 4.5 wird jeweils ein Maximum über alle Punkte in  $Q$  genommen. Daraus ergibt sich, dass diese Zahlen nicht größer werden können, wenn man von  $Q$  zu einem Teilquader von  $Q$  übergeht. Mit anderen Worten gelten die Ungleichungen aus dem Lemma für alle Teilquader von  $Q$  für konstante Werte von  $M$  und  $N$ . Dies ist alles, was wir im Folgenden benötigen werden — der genaue Ausdruck für diese beiden Zahlen ist für unsere Anwendungen unwichtig.

Mit diesen Ergebnissen können wir nun endlich den eigentlichen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes führen:

*Beweis von Satz 4.1.* Wir teilen den gegebenen Quader  $Q$  in vier gleich große Teilquader auf, die wir mit I, II, III, IV bezeichnen:



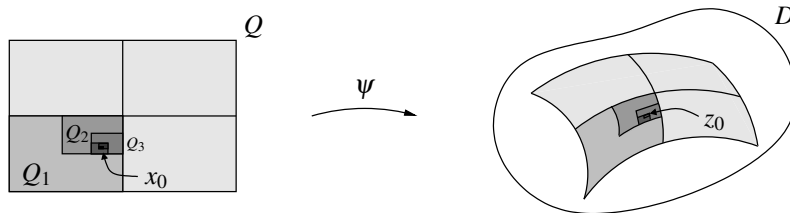
Wie schon in Beispiel 4.2 sieht man sofort, dass sich das Integral von  $f$  über den Weg  $\gamma = \psi(\partial Q)$  aufteilen lässt in die Summe der vier Wegintegrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\psi(\partial I)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial II)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial III)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial IV)} f(z) dz$$

(die Integrale auf den Wegstrecken zwischen den Teilquadern heben sich weg, da sie zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden). Damit folgt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\psi(\partial I)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial II)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial III)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial IV)} f(z) dz \right| \\ &\leq 4 \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_1)} f(z) dz \right|, \end{aligned}$$

wobei  $Q_1 \in \{I, II, III, IV\}$  ein Teilquader ist, für den der Betrag des betrachteten Wegintegrals am größten ist. Wir setzen dieses Verfahren nun rekursiv fort und definieren so eine Folge  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  von Quadern, von denen jeder aus dem vorhergehenden durch die obige Prozedur entsteht:



Die obige Abschätzung liefert dann offensichtlich induktiv

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_n)} f(z) dz \right| \quad (1)$$

für alle  $n$ .

Beachte, dass die so konstruierte Folge von Quadern in beiden Koordinaten eine Intervallschachtelung definiert, und der Schnitt aller Quader  $Q_n$  damit genau ein Punkt  $x_0$  in  $Q$  ist. Es sei  $z_0 := \psi(x_0)$  wie oben eingezeichnet der zugehörige Bildpunkt unter  $\psi$ .

Da  $z_0$  in  $\psi(Q)$  liegt, ist  $f$  nun nach Voraussetzung in  $z_0$  komplex differenzierbar. (Dies ist übrigens die einzige Stelle des Beweises, an der wir die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  verwenden —

und wir sehen in der Tat, dass wir diese Eigenschaft nicht auf dem Integrationsweg  $\gamma$  selbst, sondern *irgendwo in der von  $\gamma$  begrenzten Fläche* benötigen!) Die Funktion  $f$  ist in  $z_0$  also linear approximierbar, d. h. es gibt eine (notwendig stetige) Funktion  $r: D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{(*)} + r(z) \quad \text{für alle } z \in D \quad (2)$$

$$\text{und} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0 \quad (3)$$

[G2, Lemma 25.1]. Hier hat der mit  $(*)$  bezeichnete Term offensichtlich eine Stammfunktion (nämlich  $zf(z_0) + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$ ), so dass beliebige geschlossene Wegintegrale über diesen Ausdruck nach Lemma 3.10 verschwinden. Setzen wir (2) also auf der rechten Seite in (1) ein, so erhalten wir für alle  $n$ , wobei  $M$  und  $N$  die (konstanten) Maxima aus Lemma 4.5 für den Gesamtquader  $Q$  bezeichnen (siehe Bemerkung 4.6):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_n)} r(z) dz \right| \\ &\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |r(z)| && \text{(Lemma 4.4 (b))} \\ &\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |z - z_0| \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| \\ &\leq 4^n \cdot MN \cdot L(\partial Q_n) \cdot \max_{x \in Q_n} |x - x_0| \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| && \text{(Lemma 4.5 (a) und (b))} \\ &\leq 4^n \cdot MN \cdot L(\partial Q_n)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| && (|x - x_0| \leq L(\partial Q_n) \text{ für } x_0, x \in Q_n) \\ &= MN \cdot L(\partial Q)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right|. && (L(\partial Q_n) = 2^{-n} \cdot L(\partial Q)) \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck ist  $MN \cdot L(\partial Q)^2$  unabhängig von  $n$ . Im verbleibenden Maximum hingegen konvergiert das  $z$ , an dem jeweils das Maximum angenommen wird, notwendigerweise gegen  $z_0$ . Nach (3) konvergiert das Maximum mit  $n \rightarrow \infty$  also gegen Null, womit wie behauptet  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  folgt.  $\square$

Um zu sehen, dass der Cauchysche Integralsatz bereits ein mächtiges Werkzeug der Funktionentheorie ist, wollen wir mit seiner Hilfe nun einen ersten einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben — also zeigen, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  hat. Wir werden später in dieser Vorlesung noch einige andere Beweise dafür sehen.

**Aufgabe 4.7 (Fundamentalsatz der Algebra, 1. Beweis).** Es sei  $f$  zunächst ein nicht-konstantes reelles Polynom, von dem wir annehmen, dass es keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  hätte. Man zeige dann für das Wegintegral

$$I := \int_{|z|=1} \frac{1}{zf\left(z + \frac{1}{z}\right)} dz$$

- (a) mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass  $I = 0$ ;
- (b) mit Hilfe der Definition des Wegintegrals, dass  $I \neq 0$ .

Wie folgt daraus der Fundamentalsatz der Algebra, also dass auch jedes nicht-konstante *komplexe* Polynom eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  hat?