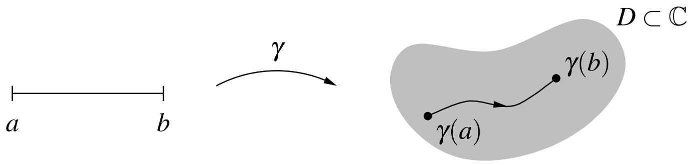
3. Wegintegrale

Nach der Differentiation wollen wir uns nun mit der Integration beschäftigen. Auch hier ist die Funktionentheorie wieder eine interessante Mischung aus ein- und zweidimensionaler Theorie: Einerseits haben wir nur eine komplexe Variable und damit eindimensionale Integrale, anderseits liegen diese eindimensionalen Integrale aber in der (reell zweidimensionalen) Ebene. Wir werden also über eindimensionale Objekte in der Ebene, also über „Wege" integrieren müssen:

Definition 3.1 (Wege)**.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$. Ein **Weg** in D ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to D$ von einem kompakten reellen Intervall nach D.



Ein solcher Weg heißt ...

(a) **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$;

(b) **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[a,b]$ gibt, so dass die Einschränkungen $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ für alle $k = 1,\dots,n$ stetig differenzierbar sind. In diesem Fall ist die Ableitung $\gamma'\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ dann also eine stückweise stetige Funktion (die an den Zwischenstellen $t_1,\dots,t_{n-1}$ jedoch möglicherweise nicht definiert ist).

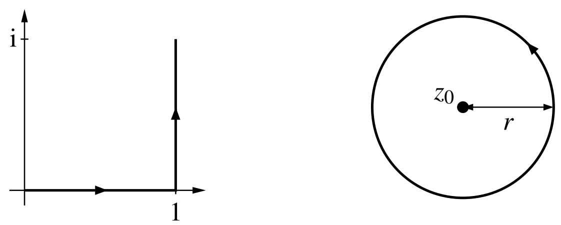
Beispiel 3.2.

(a) Der Weg

$$\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} t & \text{für } 0 \le t \le 1, \\ 1 + \mathrm{i}\,(t-1) & \text{für } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

ist stückweise stetig differenzierbar mit Ableitung 1 für $t < 1$ und i für $t > 1$; er läuft entlang zweier Geradenstücke vom Nullpunkt über 1 nach $1 + \mathrm{i}$.

(b) Der Weg $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ (für festes $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$) ist stetig differenzierbar und geschlossen; er läuft einmal entgegen dem Uhrzeigersinn entlang einer Kreislinie vom Radius r um den Punkt z_0.



(a) (b)

Wir wollen jetzt Integrale komplexer Funktionen über derartige Wege definieren. Am einfachsten ist dies für stückweise stetig differenzierbare Wege — es ist zwar möglich, für manche Funktionen auch Integrale über beliebige Wege zu definieren, dies ist aber mit sehr viel mehr Aufwand verbunden und soll daher hier nicht behandelt werden, zumal ohnehin nahezu alle in der Praxis auftretenden Wege stückweise stetig differenzierbar sind. Wir vereinbaren also:

Im Folgenden seien Wege immer als stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Definition 3.3 (Integrale)**.** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

(a) Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, so definieren wir die **Länge** von γ als

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

02

(b) Für eine stückweise stetige *komplexwertige* Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ auf dem *reellen* Intervall $[a,b]$ definieren wir das Integral von g über $[a,b]$ einfach durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil als

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b (\operatorname{Re} g(t))\,dt + \mathrm{i} \cdot \int_a^b (\operatorname{Im} g(t))\,dt \quad \in \mathbb{C},$$

so dass es also insbesondere $\mathbb{C}$-linear in der zu integrierenden Funktion wird. Viele Aussagen aus der eindimensionalen Analysis wie z. B. der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung oder die Substitutionsregel übertragen sich durch Aufteilung in Real- und Imaginärteil auf diesen Fall einer Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

(c) Sind $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma\colon [a,b] \to D$ ein Weg in D, so ist das **Wegintegral** (oder **Kurvenintegral**) von f entlang γ definiert als

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \quad \in \mathbb{C}$$

(wobei das Integral auf der rechten Seite im Sinne von (b) zu verstehen ist).

Beachte, dass diese Integrale (im Riemannschen Sinne) existieren, da alle Integranden nach Voraussetzung stückweise stetige Funktionen sind [G2, Beispiel 12.16].

Bemerkung 3.4. Man kann zeigen, dass die oben definierte Länge $L(\gamma)$ eines Weges genau das ist, was man anschaulich unter der Länge des Weges γ verstehen würde (nämlich die Gesamtlänge, die man erhält, wenn man γ beliebig genau durch Geradenstücke approximiert). Da auf dem Weg ja $z = \gamma(t)$ gilt, kann man sich dies anschaulich mit Hilfe der „Pseudo-Rechnung“

$$L(\gamma) = \int |\gamma'(t)|\,dt = \int \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = \int |dz|$$

merken, denn $|dz|$ ist ja gerade „die Länge eines unendlich kleinen Geradenstücks dz“. Mit einer ähnlichen „Pseudo-Rechnung“ kann man auch die Formel für das Wegintegral begründen:

$$\int f(z)\,dz = \int f(z)\,\frac{dz}{dt}\,dt = \int f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Beispiel 3.5.

(a) Es sei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ eine Kreislinie um z_0 mit Radius r wie in Beispiel 3.2 (b). Dann ist die Länge von γ (wie elementargeometrisch erwartet)

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Betrachten wir zusätzlich noch die Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$, so ist das Wegintegral von f über γ gleich

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

Derartige Wegintegrale haben — im Gegensatz zu reellen Integralen — *keine anschauliche Bedeutung* als Fläche oder Volumen irgendeiner Menge unterhalb des Graphen einer Funktion. Wir werden in dieser Vorlesung jedoch sehen, dass sie ein überaus nützliches Hilfsmittel in der Funktionentheorie sind. Man kann sie sich außerdem in folgendem Sinne als Verallgemeinerung des reellen Integrals vorstellen:

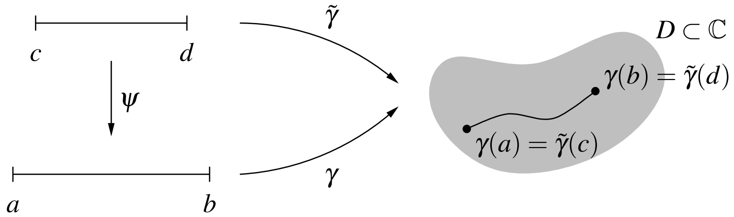
(b) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Weg, der entlang der reellen Achse verläuft; ferner seien $c = \gamma(a)$ und $d = \gamma(b)$ der Anfangs- bzw. Endpunkt des Weges. Ist dann $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, so folgt aus der Substitutionsregel für reelle Integrale [G2, Satz 12.31] sofort

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_c^d f(s)\,ds \qquad \text{mit } s = \gamma(t),$$

d. h. wir erhalten einfach das normale reelle Integral über f vom Startpunkt bis zum Endpunkt des Weges.

Beachte, dass es in diesem Fall für das Integral keine Rolle spielt, wie der Weg γ (also die Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$) genau aussieht, solange er nur entlang der reellen Achse von c nach d läuft. Eine ähnliche Aussage gilt in der Tat für beliebige Wegintegrale:

Bemerkung 3.6 (Invarianz des Wegintegrals unter Umparametrisierungen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma\colon [a,b] \to D$ ein Weg in D. Ist nun $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine monoton wachsende und stetig differenzierbare Abbildung mit $\psi(c) = a$ und $\psi(d) = b$, so stellen die Wege $\gamma\colon [a,b] \to D$ und $\tilde\gamma = \gamma \circ \psi\colon [c,d] \to D$ wie in der folgenden Skizze dieselbe Bildkurve dar, die i. A. lediglich mit unterschiedlichen „Geschwindigkeiten“ durchlaufen wird. Man nennt $\tilde\gamma$ in diesem Fall eine **Umparametrisierung** von γ.



Ist nun $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so gilt für die Wegintegrale von f entlang γ bzw. $\tilde\gamma$

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz &= \int_c^d f(\tilde\gamma(t))\,\tilde\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_c^d f(\gamma(\psi(t)))\,(\gamma\circ\psi)'(t)\,dt \\
&= \int_c^d f(\gamma(\psi(t)))\,\gamma'(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds \qquad \text{(mit der Substitution } s = \psi(t)) \\
&= \int_\gamma f(z)\,dz,
\end{aligned}$$

d. h. *Wegintegrale ändern sich nicht bei Umparametrisierungen.* Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für die Länge des Weges: Es gilt $L(\tilde\gamma) = L(\gamma)$.

Beachte jedoch, dass es beim Wegintegral auf die Orientierung des Weges ankommt: Durchlaufen wir die gleiche Bildkurve in umgekehrter Richtung (ist oben also $\psi(c) = b$ und $\psi(d) = a$), so erhalten wir genauso

$$\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz,$$

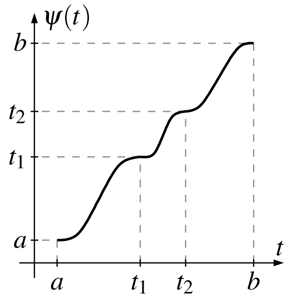
da bei der Substitution oben die Integrationsgrenzen vertauscht werden müssen.

Aufgrund der Invarianz des Wegintegrals unter Umparametrisierungen werden wir Wege in Zukunft oft nur noch durch ihre (orientierten) Bildkurven in $\mathbb{C}$ angeben und auch so zeichnen. Meistens werden unsere Wege Kreislinien (oder „ähnliche geformte“) Kurven sein; für diesen Fall vereinbaren wir, dass wir die Orientierung entgegen dem Uhrzeigersinn wählen, wenn nichts anderes angegeben wird. Für das Wegintegral aus Beispiel 3.5 (a) könnten wir also z. B. auch

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \quad \text{statt} \quad \int_\gamma f(z)\,dz$$

schreiben.

Bemerkung 3.7 (Umparametrisierungen in stetig differenzierbare Wege)**.** Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ besitzt eine stetig differenzierbare Umparametrisierung: Haben wir eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, so dass γ auf $[t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar ist für alle $k = 1,\dots,n$, so wählen wir wie im Bild rechts eine beliebige monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon [a,b] \to [a,b]$ mit $\psi(t_k) = t_k$ und $\psi'(t_k) = 0$ für alle $k = 0,\dots,n$. Für den umparametrisierten Weg $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ gilt dann auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$



$$(\tilde{\gamma}|_{[t_{k-1},t_k]})'(t_k) = (\gamma|_{[t_{k-1},t_k]})'(t_k) \cdot \psi'(t_k) = 0$$

und analog $(\tilde{\gamma}|_{[t_{k-1},t_k]})'(t_{k-1}) = 0$. Die einzelnen Wegstücke $\tilde{\gamma}|_{[t_{k-1},t_k]}$ lassen sich damit zu einem überall stetig differenzierbaren Weg $\tilde{\gamma}$ (mit Ableitung 0 an den Punkten $t_0,\dots,t_n$) zusammensetzen. Anschaulich entsteht $\tilde{\gamma}$ aus γ, indem man vor den Knickstellen von γ auf Geschwindigkeit Null abbremst, um danach in einer anderen Richtung wieder mit langsam ansteigender Geschwindigkeit zu starten.

Aufgrund dieses Ergebnisses werden wir uns bei der Untersuchung von Wegintegralen in Zukunft oft auf stetig differenzierbare Wege beschränken.

Bemerkung 3.8. Wir haben gerade gesehen, dass sich Wegintegrale nicht bei Umparametrisierungen des Weges ändern. Eine nächste naheliegende Frage ist, ob derartige Integrale vielleicht sogar nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen. Im Allgemeinen kann dies jedoch nicht der Fall sein: Betrachten wir nämlich noch einmal den geschlossenen Kreisweg $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit dem Integral $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi\mathrm{i}$ aus Beispiel 3.5 (a), so hat dieser Weg natürlich den gleichen Anfangs- und Endpunkt wie der konstante Weg $\tilde{\gamma}(t) \equiv r$; jedoch ist über diesen konstanten Weg natürlich wegen $\tilde{\gamma}'(t) = 0$ jedes Wegintegral gleich Null.

Dennoch werden wir sehen, dass Wegintegrale „sehr oft" nur vom Anfangs- und Endpunkt des betrachteten Weges abhängen. So besitzen viele Funktionen z. B. eine Stammfunktion, mit der man wie im Reellen Integrale berechnen kann, indem man einfach die Differenz ihrer Werte am Anfangs- und Endpunkt nimmt:

Definition 3.9 (Stammfunktionen)**.** Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $F\colon D \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn F holomorph auf D ist mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

Lemma 3.10 (Integralberechnung mit Stammfunktionen)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ stetig, und $\gamma\colon [a,b] \to D$ ein Weg in D. Hat f eine Stammfunktion F auf D, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere hängt das Wegintegral dann also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, aber nicht vom Weg selbst ab. Ist der Weg γ geschlossen, so ist damit notwendigerweise $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Beweis. Dies ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = [F\circ\gamma]_a^b \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.11.

(a) Nach Bemerkung 3.8 hängen Wegintegrale über die Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$ im Allgemeinen *nicht* nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Also besitzt f nach Lemma 3.10 keine Stammfunktion.

Wir sehen hier also schon, dass die Existenz einer Stammfunktion im Komplexen eine viel stärkere Bedingung als im Reellen ist (wo ja z. B. jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt [G2, Folgerung 12.24 (a)]). Wir werden später noch genauer untersuchen, unter welchen Bedingungen eine gegebene Funktion eine Stammfunktion besitzt (siehe Satz 6.1).

(b) Da die Regeln zum Differenzieren komplexer Funktionen nach Satz 2.11 jedoch formal genauso wie im Reellen aussehen, können wir in vielen Fällen eine Stammfunktion einer komplexen Funktion mit den gleichen Regeln wie im Reellen finden. So ist z. B. für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$ wie gewohnt $F(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von $f(z) = (z-z_0)^n$. Nach Lemma 3.10 ist für $n \neq -1$ also z. B. $\int_\gamma (z-z_0)^n\, dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ. Fassen wir dies mit Beispiel 3.5 (a) zusammen, so erhalten wir für $n \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\boxed{\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i} & \text{für } n = -1. \end{cases}}$$

Wie wir in dieser Vorlesung noch sehen werden, ist dieses einfache Ergebnis über die Wegintegrale der Potenzen von z (entlang von Kreislinien um 0) ein zentrales und sehr wichtiges Resultat der Funktionentheorie, das immer wieder auftritt — insbesondere beim Residuensatz 11.14.

Aufgabe 3.12.

(a) Berechne die Wegintegrale

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)^2}\, dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma \bar{z}^2\, dz$$

entlang einer geraden Strecke γ von 1 nach i.

(b) Untersuche, ob die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}^2$ eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 3.13. Wir haben in Beispiel 3.11 (a) gesehen, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ keine Stammfunktion besitzen kann. In dieser Aufgabe wollen wir nun zeigen, dass wir jedoch eine Stammfunktion finden können, wenn wir den Definitionsbereich der Funktion verkleinern.

Es sei dazu $D := \{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : r \in \mathbb{R}_{>0}, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{C}$ das Komplement der negativen reellen Achse. Man zeige:

(a) Die Abbildung $\log\colon D \to \mathbb{C}$ mit

$$\log z := \log r + \mathrm{i}\varphi$$

ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf D. Wir nennen $\log z$ den **komplexen Logarithmus** von z.

(b) Es seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig. Dann gilt für jeden Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ von z_1 nach z_2

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \log z_2 - \log z_1 + 2\pi\mathrm{i}k \tag{$*$}$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. (Hinweis: Eine Möglichkeit hierfür besteht darin zu zeigen, dass die Funktion

$$g\colon [a,b] \to \mathbb{C},\ x \mapsto \frac{\gamma(a)}{\gamma(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt\right)$$

konstant ist.)

(c) Umgekehrt gibt es für alle $z_1, z_2 \in D$ und $k \in \mathbb{Z}$ einen Weg γ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ von z_1 nach z_2, so dass $(*)$ gilt.