2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wir wollen uns nun komplexen Funktionen zuwenden und dabei zunächst die ersten in der Analysis betrachteten Eigenschaften untersuchen, nämlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bei der Stetigkeit gibt es keine Überraschungen, da sie natürlich genauso definiert wird wie schon aus den Grundlagen der Mathematik bekannt.

Definition 2.1 (Grenzwerte von Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in \overline{D}$ ein Punkt im Abschluss von D [G2, Definition 8.1 bzw. 23.38]. Dann heißt $c \in \mathbb{C}$ **Grenzwert** von $f(z)$ für $z \to a$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in D : |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-c| < \varepsilon$$

gilt. Wie üblich schreiben wir diese Bedingung auch als $\lim_{z\to a} f(z) = c$ oder „$f(z) \to c$ für $z \to a$“ und sagen, dass $f(z)$ mit $z \to a$ gegen c **konvergiert**.

Bemerkung und Definition 2.2. Liegt der betrachtete Punkt a in Definition 2.1 sogar in D, so kommt als Grenzwert offensichtlich nur $c = f(a)$ in Frage, da das Einsetzen von $z = a$ dann (für alle δ) zugelassen ist und somit $|f(a)-c| < \varepsilon$ für alle ε, also $|f(a)-c| = 0$ gelten muss. Existiert der Grenzwert in diesem Fall tatsächlich, gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in D : |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-f(a)| < \varepsilon,$$

so heißt f **stetig** in $a \in D$. Man nennt f stetig auf D, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Liegt der Punkt a in Definition 2.1 hingegen nicht in D, so sagt man im Fall der Existenz des Grenzwerts, dass f durch den Wert c nach a **stetig fortsetzbar** ist.

Bemerkung 2.3. Wir haben die Grenzwerte von Funktionen bzw. die Stetigkeit offensichtlich genauso wie in den Grundlagen der Mathematik definiert — wahlweise wie im eindimensionalen Fall mit Grundkörper $\mathbb{C}$ oder wie im zweidimensionalen Fall mit Grundkörper $\mathbb{R}$ und der euklidischen Norm. Daher gelten natürlich auch die uns bereits bekannten Kriterien:

(a) (**Folgenkriterium** für Grenzwerte von Funktionen bzw. für Stetigkeit) Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und einen Punkt $a \in \overline{D}$ gilt genau dann $\lim_{z\to a} f(z) = c$, wenn für jede Folge $(z_n)_n$ in D mit $z_n \to a$ auch $f(z_n) \to c$ gilt. Dementsprechend ist f genau dann stetig in $a \in D$, wenn für jede Folge $(z_n)_n$ mit $z_n \to a$ auch $f(z_n) \to f(a)$ gilt [G2, Satz 8.11].

(b) Ein Grenzwert bzw. die Stetigkeit kann im Zielraum komponentenweise überprüft werden: Schreiben wir eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ z. B. als $f(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z)$ mit $u = \operatorname{Re} f\colon D \to \mathbb{R}$ und $v = \operatorname{Im} f\colon D \to \mathbb{R}$, so ist f in einem Punkt $a \in D$ genau dann stetig, wenn u und v es sind [G2, Lemma 24.7].

Beispiel 2.4.

(a) Die komplexe Konjugation $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ ist nach Bemerkung 2.3 (b) in jedem Punkt stetig, da die beiden Komponentenfunktionen $\operatorname{Re} f(z) = x$ und $\operatorname{Im} f(z) = -y$ (mit $z = x + \mathrm{i}y$) natürlich stetig sind.

(b) Genauso ist die komplexe Exponentialfunktion

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

überall stetig, da ihre Komponentenfunktionen $\operatorname{Re} f(z) = \mathrm{e}^x \cos y$ und $\operatorname{Im} f(z) = \mathrm{e}^x \sin y$ es sind.

(c) Wir wissen ebenfalls bereits, dass Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig sind [G2, Satz 8.13 und 8.15] — dies zeigt man über $\mathbb{C}$ genauso wie über $\mathbb{R}$. Insbesondere sind damit nach (a) also alle Polynome oder rationalen Funktionen in z und $\overline{z}$ stetig.

Auch die Differenzierbarkeit wird zunächst formal genauso definiert wie für Funktionen in einer reellen Variablen, also über die Existenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten. Um sicherzugehen, dass wir uns dem betrachteten Punkt von allen Seiten beliebig nähern können, werden wir dabei der Einfachheit halber voraussetzen, dass die Definitionsmenge D der betrachteten Funktionen offen ist, also um jeden ihrer Punkte $a \in M$ noch eine kleine Kreisscheibe $U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ enthält.

Definition 2.5 (Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $a \in D$. Dann heißt f **komplex differenzierbar** in a, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{z \in D\backslash\{a\} \\ z \to a}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

existiert. Diese Zahl heißt dann auch die **Ableitung** von f in a. Ist f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar, so heißt f auf D **holomorph**.

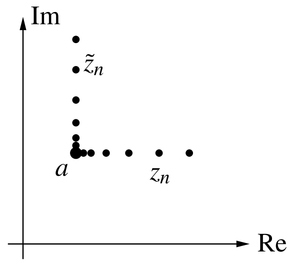
Beispiel 2.6.

(a) Die Identität $f(z) = z$ ist auf $\mathbb{C}$ holomorph mit Ableitung $f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{z-a}{z-a} = 1$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

(b) Die komplexe Konjugationsabbildung $f(z) = \overline{z}$ ist *in keinem Punkt komplex differenzierbar*: Um dies zu beweisen, zeigen wir mit Hilfe des Folgenkriteriums aus Bemerkung 2.3 (a), dass der Grenzwert aus Definition 2.5 nicht existiert.

Dazu sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir betrachten zunächst die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ mit $z_n = a + \frac{1}{n}$, die „von rechts kommend" gegen a konvergiert. In diesem Fall ergibt sich für den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-f(a)}{z_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{a} + \frac{1}{n} - \overline{a}}{a + \frac{1}{n} - a} = 1.$$



Führen wir die gleiche Rechnung jedoch für die „von oben" gegen a konvergierende Folge $\tilde{z}_n = a + \frac{i}{n}$ durch, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\tilde{z}_n)-f(a)}{\tilde{z}_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{a} - \frac{i}{n} - \overline{a}}{a + \frac{i}{n} - a} = -1,$$

also ein anderes Resultat. Nach dem Folgenkriterium existiert der Grenzwert aus Definition 2.5 also nicht, d. h. f ist in a nicht komplex differenzierbar.

Bemerkung 2.7. Das Resultat aus Beispiel 2.6 (b) ist auf den ersten Blick sicher sehr überraschend, weil die Funktion $f(z) = \overline{z}$, also in reellen Koordinaten $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, ja doch sehr „harmlos" aussieht und ihr Funktionsgraph (wenn man ihn in $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ zeichnen könnte) sicherlich keinerlei „Knicke" hätte. In der Tat ist f als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ natürlich auch reell (total) differenzierbar, wie wir aus den Grundlagen der Mathematik wissen. Wir sehen also schon, dass *die komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht dasselbe ist wie die reelle Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*.

Dieser Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit ist absolut fundamental — in der Tat gäbe es die Funktionentheorie ohne ihn nicht. Woran liegt dieser Unterschied anschaulich? Das Problem in Beispiel 2.6 (b) rührte daher, dass wir uns dem Punkt *a aus verschiedenen Richtungen* genähert haben und für diese Richtungen jeweils den Grenzwert des Differenzenquotienten, d. h. die Änderung von f in dieser Richtung, berechnet haben. Wir haben hier also ganz entscheidend den zweidimensionalen Charakter der komplexen Zahlenebene ausgenutzt. Für die *reelle* Differenzierbarkeit ist es in Ordnung, wenn die Änderungen von f in die beiden Koordinatenrichtungen voneinander unabhängig sind, d. h. wenn die partiellen Ableitungen von f nach x und y nicht miteinander zusammenhängen: In unserem Beispiel 2.6 (b) ändert sich f entlang der reellen Achse proportional zu z, entlang der imaginären Achse jedoch proportional zu $-z$. Bei der *komplexen* Differenzierbarkeit hingegen muss der Grenzwert des Differenzenquotienten immer derselbe sein — die Ableitung ist hier nur eine einzige Zahl, die die Änderung von f in *jeder* Richtung angeben muss. Wenn die Änderungsraten von f in den verschiedenen Richtungen nicht dieselben sind, dann ist f dort nicht komplex differenzierbar.

Wie können wir diesen Sachverhalt nun mathematisch exakt ausdrücken? Dazu erinnern wir uns daran, dass Differenzierbarkeit nichts weiter als *lineare Approximierbarkeit* bedeutet. Das Problem besteht daher einfach darin, dass eine *reell lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ nicht das gleiche ist wie eine *komplex lineare Abbildung* von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Dafür ist in der Tat die gerade betrachtete komplexe Konjugationsabbildung wiederum ein Beispiel: Natürlich ist

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine reell lineare Abbildung, aber $f(z) = \overline{z}$ ist nicht komplex linear, denn für allgemeine $\lambda, z \in \mathbb{C}$ ist

$$f(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\,\overline{z} = \overline{\lambda}\, f(z) \neq \lambda\, f(z).$$

Den genauen Unterschied zwischen reell und komplex linearen Abbildungen beschreibt das folgende Lemma. 01

Lemma 2.8. *Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sind äquivalent:*

(a) *Es gibt ein $w \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = wz$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (d. h. f ist eine komplex lineare Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$).*

(b) *Es gibt eine Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (d. h. f ist eine reell lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), und es gilt $a_{1,1} = a_{2,2}$ und $a_{2,1} = -a_{1,2}$

In diesem Fall hängen die Konstante w aus (a) und die Einträge der Matrix A aus (b) über die Beziehung $w = a_{1,1} + \mathrm{i}a_{2,1}$ miteinander zusammen.

Beweis. Mit $w = u + \mathrm{i}v$ für $u, v \in \mathbb{R}$ ist (a) äquivalent zu

$$f(x + \mathrm{i}y) = (u + \mathrm{i}v)(x + \mathrm{i}y) = ux - vy + \mathrm{i}(vx + uy),$$

und damit, im Start- und Zielraum als Vektoren in $\mathbb{R}^2$ geschrieben, zu

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dies ist aber offensichtlich genau die Aussage (b), mit $a_{1,1} = u$ und $a_{2,1} = v$, und zeigt auch bereits die Zusatzaussage $w = u + \mathrm{i}v = a_{1,1} + \mathrm{i}a_{2,1}$. □

Wir übertragen diese Aussage über lineare Abbildungen nun auf die linearen Approximationen — also die Ableitungen — beliebiger Funktionen. Dabei wird die komplexe Konstante w aus Lemma 2.8 zur komplexen Ableitung und die reelle Matrix A zur reellen Ableitung, so dass sich das folgende einfache Kriterium zur Überprüfung der komplexen Differenzierbarkeit ergibt:

Satz 2.9. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $z_0 \in D$. Wir bezeichnen den Real- bzw. Imaginärteil von f mit $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y)$ und $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y)$. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist komplex differenzierbar in z_0.*

(b) *f ist reell (total) differenzierbar in z_0, und für die partiellen Ableitungen in diesem Punkt gelten die* ***Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen***

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

In diesem Fall ist die komplexe Ableitung von f in z_0 gegeben durch $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

Beweis. Nach Definition ist f im Punkt $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ genau dann reell differenzierbar, wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und eine Funktion $r \colon D \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + r(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0 \tag{$*$}$$

[G2, Definition 25.3]. Wir wissen aus den Grundlagen der Mathematik auch bereits, dass hierbei für A nur die Jacobi-Matrix

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (z_0)$$

von f in z_0 in Frage kommt [G2, Folgerung 25.12]. Damit ist die Aussage (b) des Satzes äquivalent zur reellen Differenzierbarkeit ($*$) zusammen mit den Gleichungen $a_{1,1} = a_{2,2}$ und $a_{2,1} = -a_{1,2}$ für die Einträge der Matrix A. Nach Lemma 2.8 ist dies nun wiederum äquivalent zur Existenz einer komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$ und einer Funktion $r \colon D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + w\,(z - z_0) + r(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0,$$

was nach [G2, Lemma 25.1] exakt die Bedingung (a) der komplexen Differenzierbarkeit von f in z_0 ist.

Die Formel $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ ergibt sich sofort aus dem Zusatz von Lemma 2.8. □

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9 geben uns also ein einfaches Kriterium, um zu berechnen, ob bzw. wo eine gegebene Funktion komplex differenzierbar ist:

Beispiel 2.10.

(a) Es sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}$ noch einmal die komplexe Konjugationsabbildung aus Beispiel 2.6 (b). Mit der Notation aus Satz 2.9 ist dann

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = x \quad \text{und} \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = -y.$$

Damit sind u und v (und damit auch f) reell differenzierbar. Die Funktionen erfüllen jedoch nirgends die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, denn es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

in jedem Punkt von $\mathbb{C}$. Nach Satz 2.9 ist f also nirgends komplex differenzierbar — was wir bereits in Beispiel 2.6 (b) durch eine aufwändigere Rechnung gesehen hatten.

(b) Wir behaupten, dass die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = \mathrm{e}^z$ überall komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = \mathrm{e}^z$ ist. In der Tat sind die beiden Komponentenfunktionen hier wie in Beispiel 2.4 (b)

$$u(x,y) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \sin y.$$

Natürlich sind u und v, und damit auch f, reell differenzierbar. Außerdem erfüllen sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cdot \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cdot \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

in jedem Punkt. Also ist f nach Satz 2.9 überall komplex differenzierbar mit Ableitung

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cdot (\cos y + \mathrm{i} \sin y) = \mathrm{e}^z.$$

Die komplexe Ableitung erfüllt die üblichen Rechenregeln für die vier Grundrechenarten sowie die Verkettung von Funktionen:

Satz 2.11 (Rechenregeln für komplexe Ableitungen)**.**

(a) *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g \colon D \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die in einem Punkt $a \in D$ komplex differenzierbar sind. Dann gilt:*

- *$f \pm g$ ist ebenfalls komplex differenzierbar in a mit $(f \pm g)'(a) = (f' \pm g')(a)$.*
- *fg ist ebenfalls komplex differenzierbar in a mit $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$.*
- *Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ ebenfalls komplex differenzierbar in a mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(a)$.*

(b) *Es seien $f \colon D \to \mathbb{C}$ und $g \colon D' \to \mathbb{C}$ Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $f(D) \subset D'$. Ferner seien f komplex differenzierbar in a und g komplex differenzierbar in $f(a)$. Dann ist auch $g \circ f$ komplex differenzierbar in a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Beweis. Siehe [G2, Satz 10.8 und 10.10]; der Beweis ist für $\mathbb{C}$ wörtlich derselbe wie für $\mathbb{R}$. □

Beispiel 2.12. Die komplexe Sinusfunktion $f(z) = \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$ aus Bemerkung 1.9 (c) ist nach Satz 2.11 wie erwartet komplex differenzierbar mit

$$f'(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - (-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \cos z$$

da wir die Exponentialfunktion in Beispiel 2.10 (b) bereits als differenzierbar mit Ableitung e^z erkannt haben. Genauso folgt natürlich auch $\cos'(z) = -\sin z$.

Aufgabe 2.13 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f \colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei $a \in D$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$.

Zeige, dass es dann offene Umgebungen $U \subset D$ von a sowie $V \subset \mathbb{C}$ von $f(a)$ gibt, so dass die Einschränkung $f \colon U \to V$ bijektiv und ihre demzufolge existierende Umkehrfunktion $f^{-1} \colon V \to U$ ebenfalls holomorph mit Ableitung $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ ist.

(Hinweis: Der Satz über lokale Umkehrfunktionen aus den Grundlagen der Mathematik [G2, Satz 27.6] *ist hier sicher nützlich. Ihr dürft ohne Beweis verwenden, dass die Ableitung $f' \colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist — wir werden in Folgerung 8.1 „(a) ⇒ (b)“ noch sehen, dass dies für holomorphe Funktionen immer der Fall ist.)*

Bemerkung 2.14. Mit Hilfe der Regeln von Satz 2.11 wissen wir also nun von vielen „Standardfunktionen“, dass sie komplex differenzierbar sind, und können ihre Ableitungen „genau wie im Reellen“ berechnen: alle Polynome in z, die Exponential- und Winkelfunktionen, sowie gemäß dem Satz erlaubte Kombinationen davon. Nur die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ aus Beispiel 2.6 (b) macht Probleme und führt zu nicht komplex differenzierbaren Abbildungen, wenn sie in irgendeiner Form in der betrachteten Funktion f enthalten ist.

Diese Idee kann man in der Tat ausbauen und zu einer alternativen Methode für die Bestimmung der komplexen Differenzierbarkeit machen, die oft einfacher ist als das explizite Aufspalten in Real- und Imaginärteil mit anschließendem Nachprüfen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Der Grundgedanke dieses sogenannten **Wirtinger-Kalküls** ist, die gegebene Funktion nicht in Abhängigkeit von x und y, sondern stattdessen in Abhängigkeit von z und $\overline{z}$ auszudrücken. Wenn wir eine solche „Variablentransformation“ durchführen könnten, sollte die Funktion mit obiger Idee genau dann komplex differenzierbar sein, wenn sie nur von z und nicht von $\overline{z}$ abhängt.

Natürlich sind z und $\overline{z}$ nicht wirklich unabhängige Variablen, denn die eine Zahl ist ja immer die komplex konjugierte der anderen. Wenn wir aber dennoch für einen Moment annehmen, dass wir eine Variablentransformation von x und y nach z und $\overline{z}$ machen könnten, würde man aufgrund der Relationen $x = \frac{z + \overline{z}}{2}$ und $y = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$ (siehe Lemma 1.4 (a)) mit Hilfe der (zweidimensionalen) Kettenregel [G2, Satz 25.29] für die Funktion

$$\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y)$$

die Formel

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial \bar z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \bar z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \bar z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\mathrm{i}} & -\frac{1}{2\mathrm{i}} \end{pmatrix}$$

für „die Ableitungen nach z und $\bar z$“ erwarten. Wir benutzen diese „Pseudo-Rechnung“ nun einfach, um die Größen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ zu *definieren*:

Definition 2.15. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion mit Komponentenfunktionen $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y)$ und $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y)$. Dann setzen wir wie erwartet

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

und definieren die **Wirtinger-Ableitungen** von f durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y} \right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Das Schöne an diesen Wirtinger-Ableitungen ist nun, dass sie wirklich alle Rechenregeln erfüllen, die man erwarten würde, wenn man f als Funktion von zwei unabhängigen Variablen z und $\bar z$ auffassen könnte:

Satz 2.16 (Rechenregeln für Wirtinger-Ableitungen)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in D$. Ferner seien $f,g : D \to \mathbb{C}$ zwei reell differenzierbare Funktionen.*

(a) *Die Funktion f ist genau dann komplex differenzierbar in a, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = 0$. In diesem Fall ist dann $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$.*

(b) *Es ist $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \bar z}{\partial \bar z} = 1$ und $\frac{\partial \bar z}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \bar z} = 0$ (d. h. „z und $\bar z$ verhalten sich wie unabhängige Variablen“).*

(c) *Die Rechenregeln für Ableitungen von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten gelten für die Wirtinger-Ableitungen so, als ob z und $\bar z$ unabhängige Variablen wären, d. h. es gilt*

- $\frac{\partial (f \pm g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \pm \frac{\partial g}{\partial z}$;
- $\frac{\partial (fg)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$;
- $\frac{\partial (f/g)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}$ *an allen Punkten $a \in D$ mit $g(a) \neq 0$;*

und analog für $\frac{\partial}{\partial \bar z}$.

Beweis. Mit Definition 2.15 gilt am Punkt a

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \tag{1}$$

$$\text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right). \tag{2}$$

Nach Satz 2.9 ist f nun genau dann in a komplex differenzierbar, wenn dort $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ gelten — was nach (2) äquivalent zu $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ ist. In diesem Fall ergibt die Formel $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}$ aus Satz 2.9 mit (1) außerdem $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$. Dies zeigt Teil (a).

Die Aussage (b) folgt einfach durch Einsetzen von $f(z) = z$ bzw. $f(z) = \bar z$ in (1) und (2): Für $f(z) = z$ ist z. B. $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = y$, und damit nach (1)

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + \mathrm{i} \cdot 0) = 1.$$

Die anderen drei Gleichungen ergeben sich genauso.

Die Behauptungen aus (c) schließlich zeigt man durch einfaches Nachrechnen, indem man jeweils auf beiden Seiten die Ausdrücke (1) bzw. (2) einsetzt und die entsprechenden Rechenregeln für die Ableitungen von u und v nach x und y benutzt. □

Beispiel 2.17. Nach Satz 2.16 können wir von einer Abbildung, die (durch „erlaubte Zusammensetzungen") als Funktion von z und $\bar{z}$ geschrieben ist, nun einfach die komplexe Differenzierbarkeit untersuchen bzw. im Fall der Differenzierbarkeit ihre Ableitung berechnen, indem wir z und $\bar{z}$ formal als unabhängige Variable auffassen und die Ableitungen der Funktion nach z und $\bar{z}$ berechnen:

(a) Von der Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ sehen wir sofort, dass sie nirgends komplex differenzierbar ist, denn
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}^2} \neq 0$$
für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(b) Polynome in z und $\bar{z}$ sind genau dann holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, wenn in ihnen $\bar{z}$ nicht vorkommt (denn genau dann ist ihre Wirtinger-Ableitung nach $\bar{z}$ identisch Null).

Aufgabe 2.18.

(a) Untersuche, ob die Funktion
$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{z^2}} & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$
als reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. als komplexe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.

(b) In welchen Punkten ist die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (2z+\bar{z}) \cdot |z|^2$ komplex differenzierbar? Berechne in diesen Punkten auch die Ableitung!

Aufgabe 2.19. Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ eine offene Kreisscheibe (mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$). Man zeige für jede holomorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$:

(a) Ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist f konstant.

(b) Ist $f(D) \subset \mathbb{R}$, so ist f konstant.

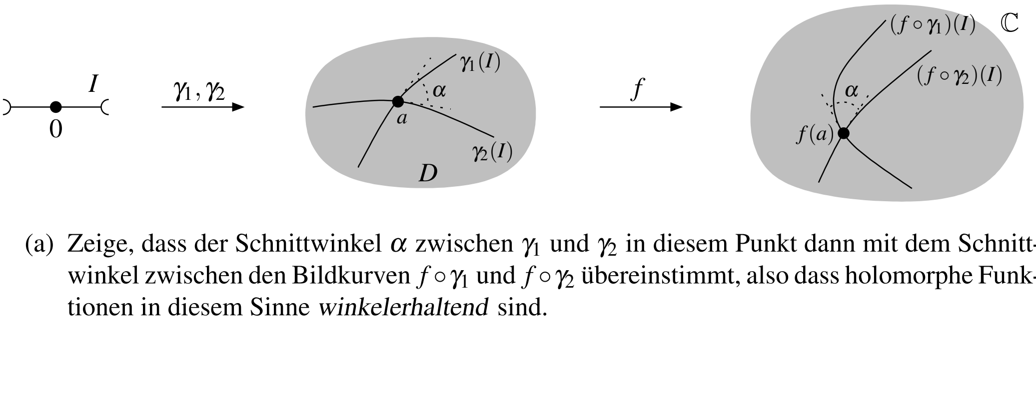
(c) Ist $|f|$ konstant, so ist f konstant.

Aufgabe 2.20. Können die folgenden Funktionen $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ der Realteil einer holomorphen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sein? Falls ja, bestimme man alle solchen holomorphen Funktionen f.

(a) $u(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2$

(b) $u(x+\mathrm{i}y) = x^2 + y^2$

Aufgabe 2.21 (Winkeltreue holomorpher Funktionen)**.** Wir betrachten eine holomorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$. Ferner seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to D$ zwei stetig differenzierbare Abbildungen, also Wege in D, die sich wie im folgenden Bild dargestellt in einem Punkt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$, $\gamma_1'(0) \neq 0$ und $\gamma_2'(0) \neq 0$ schneiden.



(a) Zeige, dass der Schnittwinkel α zwischen γ_1 und γ_2 in diesem Punkt dann mit dem Schnittwinkel zwischen den Bildkurven $f\circ\gamma_1$ und $f\circ\gamma_2$ übereinstimmt, also dass holomorphe Funktionen in diesem Sinne *winkelerhaltend* sind.

(b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ berechne und skizziere man die Bilder der achsenparallelen Geraden $\{a + \mathrm{i}t : t \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\{\mathrm{i}b + t : t \in \mathbb{R}\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ unter f, und überprüfe explizit, dass diese Bildkurven gemäß (a) wirklich überall senkrecht aufeinander stehen.