13. Abzählen von Null- und Polstellen

Als weitere Anwendung des Residuensatzes wollen wir nun sehen, wie man oft auf einfache Art berechnen kann, wie viele Null- bzw. Polstellen eine gegebene Funktion in einem bestimmten Gebiet hat. Unter anderem wird sich mit dieser Methode ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ergeben, der im Gegensatz zu unseren früheren Beweisen (siehe Aufgabe 4.7, Satz 6.20 und Satz 8.7) sehr anschaulich ist und dessen Idee auch ohne jegliche Kenntnisse der Funktionentheorie einfach verständlich ist.

Wir wissen ja bereits aus Bemerkung 11.19, dass ein geschlossenes Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ über eine Randkurve γ als Ergebnis einfach $2\pi\mathrm{i}$ mal die Summe der Residuen von f im Inneren von γ ergibt. Der Schlüssel zur Berechnung der Anzahl der Null- und Polstellen von f im Inneren von γ liegt daher in dem folgenden Lemma, das die Ordnung von f in einem Punkt als ein Residuum ausdrückt:

Lemma 13.1. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und $z_0 \in D$ oder $z_0 \in \mathbb{C}\backslash D$ eine isolierte Singularität von f. Wir nehmen an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion und $\operatorname{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ ist. Dann gilt*

$$\operatorname{ord}_{z_0} f = \operatorname{res}_{z_0} \frac{f'}{f}.$$

Beweis. Setzen wir $m = \operatorname{ord}_{z_0} f \neq -\infty$, so können wir f auf D nach Lemma 10.4 als

$$f(z) = (z-z_0)^m\, g(z)$$

schreiben, wobei g eine auf $D \cup \{z_0\}$ holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$ ist. Differenzieren ergibt nun

$$f'(z) = m\,(z-z_0)^{m-1}\, g(z) + (z-z_0)^m\, g'(z)$$

und damit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \qquad (*)$$

Hierbei ist der Ausdruck $\frac{g'}{g}$ in einer Umgebung von z_0 holomorph und damit dort eine Potenzreihe um z_0. Entwickelt man $\frac{f'}{f}$ also um z_0 in eine Laurent-Reihe, so liefert der Term $\frac{g'}{g}$ keine Beiträge mit negativen Potenzen von $z-z_0$. Das Residuum von $\frac{f'}{f}$ in z_0, d. h. nach Definition der Koeffizient von $(z-z_0)^{-1}$ in der Laurent-Entwicklung von $(*)$ um z_0, ist damit wie behauptet gleich m. □

Mit dieser Formel ergibt sich nun sofort das folgende Resultat:

Satz 13.2 (Das Null- und Polstellen zählende Integral). *Es sei D offen und einfach zusammenhängend sowie f eine Funktion, die auf D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Polstellen holomorph ist. Weiterhin sei γ eine Randkurve in D, die die Null- und Polstellen von f nicht trifft, und U das Innere von γ. Dann gilt*

$$\sum_{z\in U} \operatorname{ord}_z f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

d. h. das Integral auf der rechten Seite ist gleich der Anzahl der Nullstellen minus der Anzahl der Polstellen von f in U (wobei die Null- und Polstellen „mit Vielfachheit gezählt werden müssen", d. h. eine Null- bzw. Polstelle der Ordnung m trägt m bzw. $-m$ zum Integral auf der rechten Seite bei).

Beweis. Mit dem Residuensatz aus Bemerkung 11.19 ergibt sich sofort nach Lemma 13.1

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in U} \operatorname{res}_z \frac{f'}{f} = \sum_{z\in U} \operatorname{ord}_z f. \qquad \square$$

Man kann das Ergebnis von Satz 13.2 auch in einer „integralfreien“ Version schreiben:

Folgerung 13.3 (**Die Null- und Polstellen zählende Umlaufzahl**)**.** *Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 13.2 gilt*

$$\sum_{z\in U} \operatorname{ord}_z f = \operatorname{ind}_0(f\circ\gamma),$$

d. h. die Anzahl der Nullstellen minus die Anzahl der Polstellen von f im Inneren von γ ist gleich der Umlaufzahl des Bildweges von γ unter f um 0.

Beweis. Dies ergibt sich sofort aus Satz 13.2, denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{w}\,dw && \text{(mit der Substitution } w=f(z))\\ &= \operatorname{ind}_0(f\circ\gamma) && \text{(Definition 11.2 der Umlaufzahl).}\end{aligned}$$

□

Beispiel 13.4. Für ein gegebenes $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir die auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion $f(z)=z^n$. Weiterhin sei $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius r und Randkurve

$$\gamma\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C},\ t\mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Natürlich hat f in U keine Polstellen und (mit Vielfachheiten gezählt) n Nullstellen – nämlich die Nullstelle 0 mit Ordnung n. Dies erhalten wir auch aus Satz 13.2 und Folgerung 13.3:

(a) Das Null- und Polstellen zählende Integral aus Satz 13.2 liefert

$$\sum_{z\in U}\operatorname{ord}_z f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{nz^{n-1}}{z^n}\,dz = \frac{n}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{dz}{z} = n$$

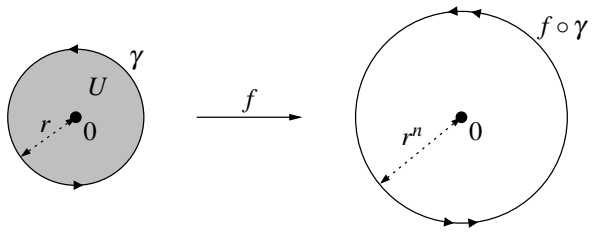
nach Beispiel 3.11 (b).

(b) Bilden wir andererseits den Weg γ mit f ab, so erhalten wir den Bildweg

$$f\circ\gamma\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C},\ t\mapsto (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},$$

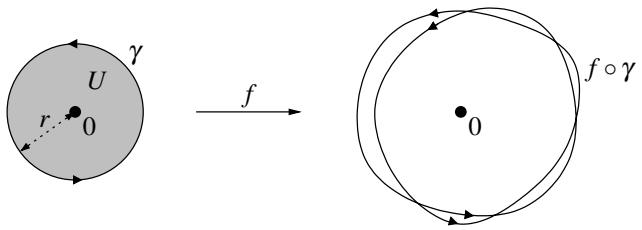
der (mit Radius r^n) wie im Bild unten n-mal um die Null herumläuft. Also liefert auch die Null- und Polstellen zählende Umlaufzahl aus Folgerung 13.3

$$\sum_{z\in U}\operatorname{ord}_z f = \operatorname{ind}_0(f\circ\gamma) = n.$$



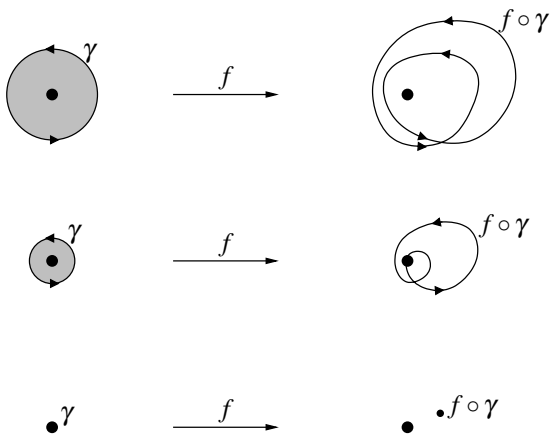
Wenn wir dieses Beispiel etwas erweitern, können wir damit bereits zu einem weiteren und sehr anschaulichen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra kommen. Wir stellen diesen Beweis zunächst informell vor, da man ihn in dieser Form auch mit nur elementaren Kenntnissen über komplexe Zahlen gut nachvollziehen kann. In Satz 13.8 werden wir ihn noch exakt ausführen.

Bemerkung 13.5 (Anschaulicher Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra)**.** Es sei f ein komplexes Polynom vom Grad $n>0$ mit Leitkoeffizient 1. Wie in Beispiel 13.4 sei γ wieder der Rand des Kreises U mit Mittelpunkt 0 und Radius r. Wählen wir r sehr groß, so ist anschaulich einleuchtend, dass $f(z)$ für Punkte z auf der Kreislinie (also mit $|z|=r$) nahe bei z^n liegen sollte, da die Terme niedrigerer Ordnung für betragsmäßig große z nur eine kleine Rolle spielen. Die Bildkurve $f\circ\gamma$ sollte also nur eine „kleine Deformation“ der Bildkurve in Beispiel 13.4 sein, so wie im folgenden Bild für den Fall $n=2$ dargestellt:



Insbesondere erwarten wir für $f \circ \gamma$ also immer noch einen Weg, der n-mal um die Null herum läuft (wenn auch nicht mehr auf einer exakten Kreislinie, sondern auf einem etwas deformierten Weg). Mit Folgerung 13.3 würde dies also schon bedeuten, dass f genau n Nullstellen in U hat, und damit insbesondere den Fundamentalsatz der Algebra zeigen. Wir wollen Folgerung 13.3 hier aber nicht voraussetzen, sondern auch dieses Resultat noch anschaulich begründen, so dass wir insgesamt also eine komplett anschauliche Begründung des Fundamentalsatzes erhalten.

Wie also kann man sich anschaulich vorstellen, dass f in U eine Nullstelle besitzen muss, wenn die Umlaufzahl $\operatorname{ind}_0(f \circ \gamma)$ des Bildweges $f \circ \gamma$ um 0 ungleich Null ist? Um dies zu sehen, lassen wir einfach (wie im folgenden Bild von oben nach unten dargestellt) den Radius r des betrachteten Kreises kleiner werden und schließlich gegen 0 gehen, so dass der Weg γ auf einen Punkt (nämlich den Nullpunkt) zusammengezogen wird.



Natürlich ziehen wir damit auch den Bildweg $f \circ \gamma$ auf einen Punkt zusammen. Der ursprüngliche Bildweg hatte aber eine Umlaufzahl ungleich Null um den Nullpunkt und war damit in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ nicht zusammenziehbar. Also muss der Bildweg beim Verkleinern von r irgendwann einmal den Nullpunkt treffen (in der Skizze oben ist dies in der mittleren Zeile der Fall). Genau in diesem Punkt liegt dann aber natürlich eine Nullstelle von f vor, denn es gibt dann ja einen Punkt auf γ, der von f auf 0 abgebildet wird.

Man kann diese Idee auch leicht in der Sprache der Homotopien (siehe Definition 5.1) ausdrücken: Die ursprüngliche Kreislinie γ lässt sich mit der Homotopie

$$\psi\colon [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{C}\,,\ \psi(t,s) = rs\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

auf den Nullpunkt zusammenziehen. Dann ist aber $f \circ \psi$ eine Homotopie zwischen $f \circ \gamma$ und einem konstanten Weg. Da es eine solche Homotopie wegen $\operatorname{ind}_0(f \circ \gamma) \neq 0$ nicht in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ geben kann, muss der Nullpunkt im Bild von $f \circ \psi$ liegen – was dann bedeutet, dass f eine Nullstelle haben muss.

Um dieses anschauliche Argument zu einem exakten Beweis zu machen, müssen wir lediglich noch die obige Aussage, dass „eine leichte Störung an der Funktion f die Umlaufzahl von $f \circ \gamma$ um 0 nicht ändert“, präzise formulieren und beweisen. Wir zeigen dies gleich in einer deutlich allgemeineren Form, die sich auch noch für andere Anwendungen als nützlich erweisen wird.

Satz 13.6 (Satz von Rouché). *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge $D \subset \mathbb{C}$. Ferner sei γ eine Randkurve in D mit Innerem U. Gilt dann*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

für alle z auf dem Weg γ, so folgt

$$\sum_{z \in U} \operatorname{ord}_z f = \sum_{z \in U} \operatorname{ord}_z g,$$

d. h. f und g haben (mit Vielfachheiten gezählt) gleich viele Nullstellen in U.

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \le t \le 1$ betrachten wir die holomorphe Funktion

$$h_t\colon D \to \mathbb{C},\ z \mapsto g(z) + t\,(f(z) - g(z)),$$

so dass also $h_0 = g$ und $h_1 = f$ ist. Nach Voraussetzung gilt für alle t und alle z auf dem Weg γ

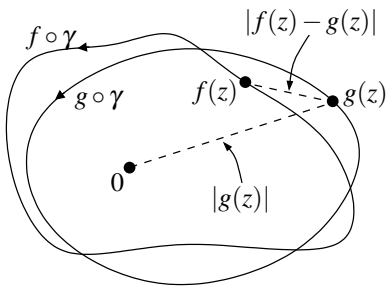
$$|h_t(z)| = |g(z) + t\,(f(z) - g(z))| \ge |g(z)| - |t| \cdot |f(z) - g(z)| \ge |g(z)| - |f(z) - g(z)| > 0.$$

Also hat h_t keine Nullstellen auf dem Weg γ. Damit ist das Integral

$$N(t) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\, dz$$

wohldefiniert und zählt nach Satz 13.2 die Anzahl der Nullstellen von h_t im Inneren von γ. Beachte, dass der Integrand und damit auch die Funktion $N(t)$ stetig in t ist. Da $N(t)$ aber nur ganzzahlige Werte annehmen kann, muss $N(t)$ also konstant sein. Insbesondere ist daher $N(0) = N(1)$, d. h. $h_0 = g$ und $h_1 = f$ haben gleich viele Nullstellen im Inneren von γ. □

Bemerkung 13.7. Auch den Satz 13.6 von Rouché kann man anschaulich leicht verstehen. Nach Folgerung 13.3 brauchen wir dazu ja nur zu sehen, dass die beiden Bildwege $f \circ \gamma$ und $g \circ \gamma$ die gleiche Umlaufzahl um 0 haben. Das folgende Bild illustriert dies in dem Fall, in dem diese Umlaufzahl gleich 1 ist:



Wir sehen an diesem Bild anschaulich, dass die Bedingung $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ auf dem Weg sicherstellt, dass $f \circ \gamma$ genauso oft um die Null herumläuft wie $g \circ \gamma$: Da der Abstand von $f(z)$ zu $g(z)$ stets kleiner ist als der von $g(z)$ zu 0, hat „$f(z)$ nicht genug Bewegungsfreiheit, um unabhängig von $g(z)$ um die Null herumzulaufen“. Im Sinne von Bemerkung 13.5 können wir g als eine „hinreichend kleine Deformation“ und damit als gute Näherung von f auf γ auffassen. In der Tat war ja auch die Beweisidee von Satz 13.6, die Funktionenschar h_t zu untersuchen, die g für $t \in [0,1]$ nach f deformiert. Im Sinne von Kapitel 5 bezeichnet man h_t auch hier als eine Homotopie – nur diesmal nicht von Wegen, sondern von holomorphen Funktionen [G3, Kapitel 6].

Anschaulich wird der Satz von Rouché manchmal auch als „der Satz vom Mann, dem Hund und der Laterne“ bezeichnet: Man stelle sich den Nullpunkt als eine Laterne vor, und $g \circ \gamma$ als den Weg eines (wahrscheinlich betrunkenen) Mannes, der um diese Laterne torkelt. Der Mann hat einen Hund an der Leine dabei, den er dabei entlang des Weges $f \circ \gamma$ mit sich mitschleift. Achtet der Mann dabei darauf, dass die Leine zu jedem Zeitpunkt kürzer ist als sein Abstand zur Laterne (d. h. gilt also stets $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$), so muss der Hund am Ende offensichtlich genauso oft um die Laterne gelaufen sein wie der Mann.

Mit dem Satz von Rouché können wir nun die Idee aus Bemerkung 13.5 zu einem exakten Beweis machen:

Satz 13.8 (**Fundamentalsatz der Algebra**, 4. Beweis)**.** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein nicht-konstantes Polynom mit Leitkoeffizient 1 ist. Mit $g(z) := z^n$ ist dann

$$f(z) - g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom von einem Grad $k \leq n-1$. Nach Lemma 6.19 gibt es also Konstanten $R > 0$ und $c > 0$, so dass

$$|f(z) - g(z)| \leq c\,|z|^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt. Dann gilt aber auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r := \max(R, c+1)$, also für alle z auf einer Kreislinie um 0 mit diesem Radius r

$$|f(z) - g(z)| \leq c \cdot |z|^k = c\,r^k \leq c\,r^{n-1} < r \cdot r^{n-1} = |z|^n = |g(z)|.$$

Aus dem Satz 13.6 von Rouché folgt damit, dass f im Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ genauso viele Nullstellen hat wie $g(z)$, nämlich n. □

Bemerkung 13.9. Obwohl wir beim Beweis von Satz 13.8 unsere Ergebnisse der Funktionentheorie benutzt haben, sollte aus der anschaulichen Begründung in Bemerkung 13.5 deutlich geworden sein, dass wir für die dort gegebenen Argumente gar nicht benötigt haben, dass f holomorph ist, sondern dass es eigentlich nur auf die *Stetigkeit* von f ankam (damit der Weg $f \circ \gamma$ kontinuierlich variiert, wenn γ es tut). Wir können diesen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra daher als rein *topologischen Beweis* auffassen – im Gegensatz zu unseren vorherigen Beweisen in Aufgabe 4.7, Satz 6.20 und Satz 8.7, die mit dem Cauchyschen Integralsatz, dem Minimumprinzip bzw. dem Satz von Liouville wirklich charakteristische Eigenschaften *holomorpher* Funktionen benutzen. In der Tat ist es gerade die topologische Natur des neuen Beweises in diesem Kapitel, die es uns ermöglicht, den Beweis anschaulich so leicht nachzuvollziehen.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch an einem Beispiel sehen, wie man mit Hilfe des Satzes von Rouché oft Abschätzungen über die Lage der Nullstellen holomorpher Funktionen gewinnen kann.

Beispiel 13.10. Es sei $f(z) = z^5 + 4z + 2$. Wir wissen natürlich, dass f als Polynom fünften Grades in der komplexen Ebene fünf Nullstellen hat. Es gibt jedoch kein Verfahren, mit dem man diese Nullstellen *exakt* berechnen kann (was übrigens üblicherweise in der Vorlesung „Einführung in die Algebra“ gezeigt wird). Man ist für die Bestimmung der Nullstellen von f also auf Näherungsverfahren angewiesen.

Mit Hilfe des Satzes von Rouché können wir nun bereits eine erste Abschätzung geben, wo die Nullstellen von f liegen müssen. Dazu müssen wir einfach eine „Vergleichsfunktion“ g und einen Weg γ finden, so dass wir ...

- einerseits zeigen können, dass g auf γ eine hinreichend gute Näherung für f darstellt (also dass dort $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ gilt), und
- andererseits wissen, wie viele Nullstellen g im Inneren von γ hat.

Hierfür haben wir natürlich verschiedene Möglichkeiten. Im konkreten Beispiel unseres hier betrachteten Polynoms können wir z. B. folgende Vergleichsfunktionen wählen:

(a) Für eine komplexe Zahl z mit $|z| = 2$ „dominiert“ im Polynom f der Term z^5: Setzen wir hier also $g(z) = z^5$, so folgt für $|z| = 2$

$$|f(z) - g(z)| = |4z + 2| \leq 4|z| + 2 = 10 < 32 = |z^5| = |g(z)|.$$

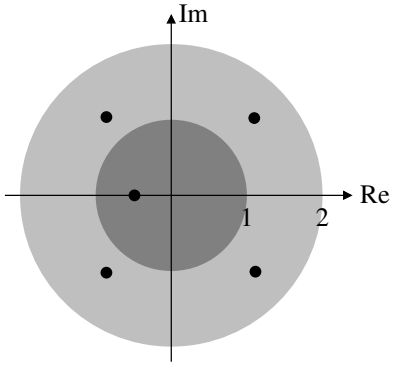
Wählen wir für γ eine Kreislinie mit Radius 2 um 0, so sagt uns der Satz von Rouché also, dass f im Inneren dieses Kreises genau so viele Nullstellen hat wie g, nämlich fünf. Alle Nullstellen von f sind also betragsmäßig kleiner als 2.

(b) Für $|z| = 1$ hingegen dominiert in f der lineare Term: Setzen wir hier $g(z) = 4z$, so erhalten wir für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 + 2| \leq |z|^5 + 2 = 3 < 4 = |4z| = |g(z)|.$$

Für diese Wahlen ergibt sich also genauso wie oben, dass f im Kreis um 0 mit Radius 1 genau eine Nullstelle hat (nämlich genau so viele wie g).

Aus diesen beiden – sehr einfachen – Rechnungen folgt also bereits, dass eine der Nullstellen von f Betrag kleiner als 1 hat und der Betrag der anderen vier Nullstellen zwischen 1 und 2 liegt. Natürlich könnten wir auch noch andere Wege oder Vergleichsfunktionen wählen, um diese Abschätzungen noch zu verbessern. Das Bild rechts zeigt übrigens (näherungsweise) die Lage der Nullstellen von f.



Aufgabe 13.11. Zeige mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass

(a) drei Lösungen der Gleichung $2z^4 + 5z^3 + z - 1 = 0$ betragsmäßig kleiner als 1 sind, und dass der Betrag der vierten Lösung zwischen 2 und 3 liegt;

(b) die Gleichung $3z^2 + e^z = 0$ im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ genau zwei Lösungen besitzt.

13