12. Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

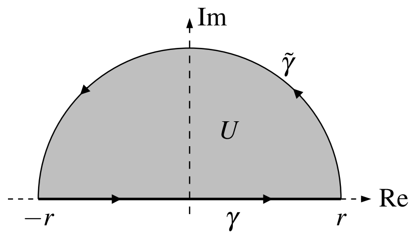
Wir haben gerade gesehen, dass man mit Hilfe des Residuensatzes nahezu beliebige geschlossene komplexe Kurvenintegrale berechnen kann. In diesem Kapitel wollen wir nun zeigen, dass sich manchmal auch *reelle* Integrale sehr einfach mit dem Residuensatz berechnen lassen — unter anderem auch einige, an die man mit den „normalen" Methoden der reellen Analysis nicht heran kommt, weil man keine Stammfunktion des Integranden angeben kann. Es handelt sich hierbei immer um bestimmte Integrale (also Integrale mit festen Integrationsgrenzen), und dabei oftmals um uneigentliche Integrale z. B. der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

wobei f eine reelle Funktion ist, die im Unendlichen schnell genug abfällt, so dass das Integral (im Riemannschen Sinne) konvergiert.

Die Idee, wie man solche Integrale unter Umständen mit Hilfe der Funktionentheorie berechnen kann, ist schnell erklärt: Im eben genannten Fall mit Integrationsgrenzen von $-\infty$ bis ∞ betrachten wir das reelle Integral zunächst einmal von $-r$ bis r für große $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und interpretieren es als komplexes Wegintegral

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$



über den rechts eingezeichneten Weg γ, der auf der reellen Achse von $-r$ nach r verläuft.

Wir versuchen nun, die ursprünglich gegebene Funktion f in einer *reellen* Variablen zu einer holomorphen Funktion in einer *komplexen* Variablen zu erweitern — bei den Standardfunktionen wie z. B. Polynomen, Exponential- oder Winkelfunktionen bzw. Kombinationen davon ist dies natürlich einfach möglich. Damit können wir dann den Integrationsweg γ mit einem weiteren Wegstück $\tilde{\gamma}$ in der komplexen Ebene so ergänzen, dass sich insgesamt eine *geschlossene* Kurve ergibt — z. B. durch einen Halbkreisbogen wie im Bild oben rechts. Mit dem Residuensatz aus Bemerkung 11.19 können wir das Integral über f entlang dieses geschlossenen Weges dann einfach berechnen und erhalten

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{z \in U} \operatorname{res}_z f. \qquad (*)$$

In dieser Situation betrachten wir nun den Grenzwert für $r \to \infty$, also einen immer größer werdenden Halbkreis. Wenn der Integrand „im Unendlichen schnell genug abfällt", können wir hoffen, dass das Integral über den immer weiter nach außen laufenden Halbkreisbogen $\tilde{\gamma}$ gegen Null konvergiert. Gelingt es uns, dies zu zeigen, bleibt in $(*)$ im Grenzfall also nur noch das Integral über γ und damit das gesuchte uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ übrig, das wir dann durch (einfach berechenbare) Residuen von f ausgedrückt haben.

Wir werden dieses Verfahren in diesem Kapitel für reelle Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin x\,dx$$

durchführen, wobei p und q jeweils beliebige Polynomfunktionen sind (und q keine reellen Nullstellen hat, so dass der Integrand auf der gesamten reellen Achse definiert ist). In jedem dieser Fälle erhalten wir so ein sehr einfaches Resultat für diese Integrale. Analoge Techniken können auch für viele andere Typen von Integranden bzw. andere Integrationsgrenzen eingesetzt werden, allerdings muss natürlich in jeder Klasse von Beispielen erneut überprüft werden, dass das „Schließen des Integrationsweges im Komplexen" das Resultat nicht ändert, also z. B. im Fall oben dass das Integral über $\tilde{\gamma}$ im Grenzfall $r \to \infty$ wirklich gegen 0 konvergiert. Da diese Abschätzungen in der Regel nur wenig spannend sind, werden wir weitere Beispiele hier nur als Übungsaufgaben erwähnen.

Definition 12.1 (Rationale Funktionen und ihr Grad)**.** Es seien $p, q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei reelle Polynome, die nicht identisch 0 sind und Grad k bzw. l haben. Dann heißt die Abbildung

$$f \colon U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit $U = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ eine (reelle) **rationale Funktion** vom **Grad** $\deg f := k - l$.

Bemerkung 12.2.

(a) Natürlich können wir jede reelle rationale Funktion f auch als komplexe meromorphe Funktion auffassen, indem wir komplexe Zahlen in die Polynome einsetzen. Wir werden diese „komplexifizierte Funktion“ im Folgenden der Einfachheit halber ebenfalls mit f bezeichnen.

(b) Haben p und q in Definition 12.1 Leitkoeffizient 1, so wissen wir nach Lemma 6.19, dass es ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $|p(z)| \le \frac{3}{2}|z|^k$ und $|q(z)| \ge \frac{1}{2}|z|^l$, also mit

$$|f(z)| = \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \le \frac{\frac{3}{2}|z|^k}{\frac{1}{2}|z|^l} = 3\,|z|^{k-l}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \ge R$. Für eine allgemeine rationale Funktion vom Grad $k-l$, also einen Quotienten von Polynomen vom Grad k bzw. l mit beliebigen Leitkoeffizienten, erhalten wir also die Abschätzung $|f(z)| \le c\,|z|^{k-l}$ für geeignete Konstanten $c, R \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \ge R$.

Als Erstes müssen wir eine Aussage der eindimensionalen reellen Analysis zeigen, die mit Funktionentheorie eigentlich nichts zu tun hat: nämlich dass das uns interessierende Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert und als Grenzwert der Integrale $\int_{-r}^{r} f(x)\,dx$ mit symmetrischen Integrationsgrenzen für $r \to \infty$ berechnet werden kann. Beachte, dass dies nicht offensichtlich ist, da uneigentliche Riemann-Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsgrenzen zunächst einmal als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{c} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{c}^{r} f(x)\,dx$$

(mit einer beliebigen Zwischenstelle c) über zwei separate Grenzwerte definiert sind, die beide existieren müssen [G2, Definition 12.27 (b)].

Lemma 12.3. *Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die es Konstanten $c, R \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $|f(x)| \le c x^{-2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \ge R$ (nach Bemerkung 12.2 (b) also z. B. eine reelle rationale Funktion vom Grad höchstens -2 ohne reelle Polstellen).*

Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die beiden Grenzwerte in der Summe

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{-R} f(x)\,dx + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{R}^{r} f(x)\,dx$$

in $\mathbb{R}$ existieren, denn nach der Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals [G2, Definition 12.27 (b)] und der Additivität des Integrals [G2, Satz 12.14] ist diese Summe dann gleich dem gesuchten uneigentlichen Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, und nach den Grenzwertsätzen dann auch gleich $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx$. Wir zeigen die Existenz für den zweiten Grenzwert $\lim_{r\to\infty} \int_{R}^{r} f(x)\,dx$; für den ersten ist die Argumentation natürlich analog.

Es seien $f_+ := \max(f, 0)$ und $f_- := \min(f, 0)$ der positive bzw. negative Anteil von f, so dass also $f_+ \ge 0$, $f_- \le 0$, und $f = f_+ + f_-$ gilt. Dann genügt es wiederum, die Existenz des Grenzwerts

$\lim_{r\to\infty}\int_R^r f_+(x)\,dx$ (und analog $\lim_{r\to\infty}\int_R^r f_-(x)\,dx$) zu beweisen, denn nach den Grenzwertsätzen existiert dann auch

$$\lim_{r\to\infty}\int_R^r f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_R^r (f_+(x)+f_-(x))\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_R^r f_+(x)\,dx + \lim_{r\to\infty}\int_R^r f_-(x)\,dx.$$

Dies folgt nun aber sofort, da die Funktion $r\mapsto \int_R^r f_+(x)\,dx$ wegen $f_+\geq 0$ monoton wachsend, und wegen

$$\int_R^r f_+(x)\,dx \leq \int_R^r c x^{-2}\,dx = [-cx^{-1}]_R^r = cR^{-1}-cr^{-1}\leq cR^{-1}$$

nach oben beschränkt ist. □

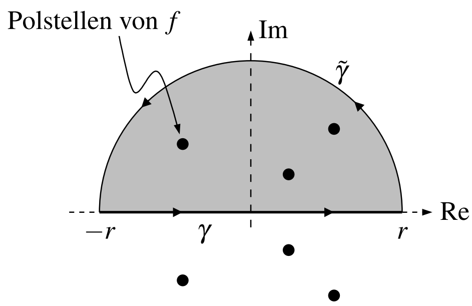
Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um die in der Einleitung dieses Kapitels motivierte Residuenformel für Integrale über rationale Funktionen zu beweisen.

Satz 12.4. *Es sei f eine reelle rationale Funktion mit $\deg f\leq -2$, die auf der reellen Achse keine Polstellen hat. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{z:\operatorname{Im}z>0}\operatorname{res}_z f,$$

d. h. man erhält (bis auf einen Vorfaktor $2\pi\mathrm{i}$) genau die Summe der Residuen von f in den Polstellen der oberen Halbebene.

Beweis. Es seien c und R wie in Bemerkung 12.2 (b). Für genügend große $r\geq R$ liegen alle Polstellen von f der oberen Halbebene wie im folgenden Bild bereits im Halbkreis über der Strecke $[-r,r]\subset\mathbb{C}$.



Nach dem Residuensatz wie in Bemerkung 11.19 gilt dann

$$\int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{z:\operatorname{Im}z>0}\operatorname{res}_z f \qquad (*)$$

mit den Wegen γ und $\tilde\gamma$ wie im Bild. Das zweite Integral können wir dabei mit Lemma 4.4 (b) durch

$$\left|\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz\right| \leq L(\tilde\gamma)\cdot\max_{|z|=r}|f(z)| \leq \pi r\cdot c\,r^{-2} = \frac{\pi c}{r}$$

abschätzen. Dieser Ausdruck konvergiert aber für $r\to\infty$ gegen 0, und so erhalten wir aus $(*)$ für $r\to\infty$

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{z:\operatorname{Im}z>0}\operatorname{res}_z f.$$

Die Behauptung folgt damit aus Lemma 12.3. □

Bemerkung 12.5. Vielleicht überrascht euch das Auftreten des Faktors i in der Formel aus Satz 12.4 etwas, da das zu berechnende Integral natürlich reell sein muss. In der Tat wird aber auch die Summe der zu berechnenden Residuen immer rein imaginär sein, so dass sich insgesamt wie erwartet
12 ein reelles Endresultat ergibt.

Beispiel 12.6. Wir wollen für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

berechnen. Dazu müssen wir nach Satz 12.4 (beachte, dass der Integrand Grad $-2n$ und keine reellen Polstellen hat) lediglich die komplexen Polstellen des Integranden suchen und an den Polstellen mit positivem Imaginärteil die Residuen aufaddieren. Das ist hier sehr einfach: Wegen

$$\frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})^n(z-\mathrm{i})^n}$$

gibt es nur die beiden Polstellen $\pm\mathrm{i}$, von denen nur $+\mathrm{i}$ in der oberen Halbebene liegt. Also ist das gesuchte Integral gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}_{\mathrm{i}}\,\frac{1}{(z^2+1)^n}.$$

Das Residuum können wir nun noch einfach mit Lemma 11.8 berechnen: Da bei $+\mathrm{i}$ eine Polstelle der Ordnung n vorliegt, ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{\mathrm{i}}\,\frac{1}{(1+z^2)^n} &= \frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z-\mathrm{i})^n\cdot\frac{1}{(z^2+1)^n}\right)^{(n-1)}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z+\mathrm{i})^{-n}\right)^{(n-1)}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}}(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)(z+\mathrm{i})^{-2n+1}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\cdot(2\mathrm{i})^{-2n+1}\\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{\pi}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

In diesem Beispiel hätten wir das Integral genauso gut mit Hilfe reeller Stammfunktionen berechnen können, auch wenn die entsprechende Rechnung weit aufwändiger gewesen wäre. Wir wollen daher nun noch andere Funktionen behandeln, bei denen sich mit den üblichen Mitteln der reellen Analysis keine Stammfunktionen ermitteln lassen und die Funktionentheorie die einzige Möglichkeit darstellt, diese Integrale zu berechnen. Wie schon angekündigt handelt es sich dabei um Funktionen, bei denen im Integranden zusätzlich zu einer rationalen Funktion wie oben noch ein Faktor $\cos x$ oder $\sin x$ steht.

Der Einfachheit halber fassen wir diese beiden Fälle zusammen und berechnen für beliebige rationale Funktionen f das *komplexwertige* Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos x\,dx + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\sin x\,dx,$$

aus dem man die beiden Einzelintegrale durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil natürlich sofort wieder zurückgewinnen kann. Der folgende Satz ist dann sowohl in der Aussage als auch im Beweis völlig analog zu Satz 12.4:

Satz 12.7. *Es sei f eine reelle rationale Funktion mit* $\deg f \le -2$*, die auf der reellen Achse keine Polstellen hat. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{z:\mathrm{Im}\,z>0}\mathrm{res}_z\left(f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right).$$

Beweis. Die Beweisidee ist dieselbe wie bei Satz 12.4: Mit denselben Bezeichnungen wie im dortigen Beweis erhalten wir aus dem Residuensatz diesmal die Gleichung

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,dz + \int_{\tilde\gamma} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\cdot \sum_{z:\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z\left(f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right). \qquad (*)$$

In diesem Fall können wir das Integral über den Halbkreisbogen mit Lemma 4.4 (b) und Bemerkung 12.2 (b) nun wie folgt abschätzen: Es ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\tilde\gamma} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,dz\right| &\le L(\tilde\gamma)\cdot \max_{\substack{|z|=r\\ \operatorname{Im} z\ge 0}} |f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \\
&\le \pi r\cdot \max_{|z|=r} |f(z)|\cdot \max_{\operatorname{Im} z\ge 0} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \\
&\le \pi r\cdot c r^{-2}\cdot \max_{\operatorname{Im} z\ge 0} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Re} z-\operatorname{Im} z}| \\
&= \pi c r^{-1}\cdot \underbrace{\max_{\operatorname{Im} z\ge 0} \mathrm{e}^{-\operatorname{Im} z}}_{=1} \\
&= \frac{\pi c}{r},
\end{aligned}$$

was wiederum für $r\to\infty$ gegen Null konvergiert. Damit erhalten wir genau wie im Beweis von Satz 12.4 in diesem Grenzfall aus $(*)$

$$\begin{aligned}
2\pi\mathrm{i}\cdot \sum_{z:\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z\left(f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right) &= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,dx \\
&= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\cos x\,dx + \mathrm{i}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\sin x\,dx.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber $|f(x)\,\cos x| \le |f(x)| \le c x^{-2}$ (und analog für $f(x)\,\sin x$) für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|\ge R$, und damit können wir diese Gleichung nach Lemma 12.3 wie gewünscht umschreiben zu

$$2\pi\mathrm{i}\cdot \sum_{z:\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z\left(f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos x\,dx + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\sin x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,dx. \qquad \square$$

Beispiel 12.8. Wir berechnen das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,dx$$

mit Hilfe von Satz 12.7. Wie in Beispiel 12.6 müssen wir hierzu nur das Residuum im Punkt i berechnen: Es gilt

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2} = \lim_{z\to\mathrm{i}} (z-\mathrm{i})\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}.$$

Insgesamt ergibt sich damit also das gesuchte Integral zu

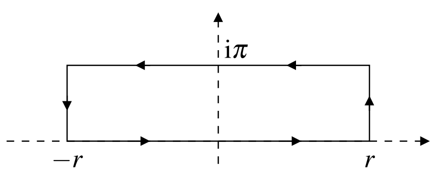
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

Aufgabe 12.9. Zeige mit Hilfe des Residuensatzes, dass $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{8}$.

Aufgabe 12.10. Berechne das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,dx$$

mit Hilfe des rechts eingezeichneten Integrationsweges.



Aufgabe 12.11. Berechne das reelle Integral $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

(Hinweis: Vergleiche das Integral mit dem Wegintegral über $\frac{1}{z^3+1}$ entlang des Strahls $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$.)