10. Isolierte Singularitäten

Der wichtigste Spezialfall von Laurent-Reihen (und in der Tat auch der, den wir ab jetzt nur noch betrachten werden) ist der, bei dem der innere Radius des Konvergenzringes 0 ist, der Konvergenzring also die Form $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \text{ und } z \neq z_0\}$ hat. Wir untersuchen damit also Funktionen, die holomorph in einer Umgebung eines Punktes z_0 — *mit Ausnahme des Punktes z_0 selbst* — sind. Solche „isolierten Definitionslücken“ holomorpher Funktionen, die natürlich in der Praxis oft vorkommen, werden in der Regel *isolierte Singularitäten* genannt.

Definition 10.1 (Singularitäten)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

(a) Ist $z_0 \in \mathbb{C}\backslash D$ ein isolierter Punkt von $\mathbb{C}\backslash D$, d. h. gibt es eine Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$, in der z_0 der einzige Punkt von $\mathbb{C}\backslash D$ ist, so nennt man z_0 eine **(isolierte) Singularität** von f.

(b) Lässt sich f in diesem Fall zu einer holomorphen Funktion auf $D \cup \{z_0\}$ fortsetzen, so bezeichnet man die isolierte Singularität z_0 als **hebbare Singularität**.

Beispiel 10.2.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ hat die isolierten Singularitäten 0 und 1. Davon ist der Punkt 1 natürlich eine hebbare Singularität, da man f problemlos auch auf den Definitionsbereich $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph fortsetzen kann — man könnte anschaulich auch sagen, der Punkt 1 ist „gar keine“ Singularität von f. Der Punkt 0 dagegen ist keine hebbare Singularität, denn wegen $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ lässt sich f nicht einmal stetig in diesen Punkt hinein fortsetzen.

(b) Nicht immer ist eine hebbare Singularität so einfach als solche zu erkennen wie in (a). Betrachten wir z. B. die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

mit isolierter Singularität in 0, so gilt für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Die Funktion f ist also eine Potenzreihe in z und damit insbesondere auch in den Nullpunkt hinein als holomorphe Funktion fortsetzbar mit Funktionswert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 1$. Also ist der Nullpunkt eine hebbare Singularität von f.

Wie oben schon angedeutet wollen wir nun unsere Theorie der Laurent-Reihen auf solche isolierten Singularitäten anwenden.

Definition 10.3. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei $z_0 \in D$, oder $z_0 \in \mathbb{C}\backslash D$ eine isolierte Singularität von f.

Nach Definition 10.1 liegt der Kreisring $U_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ dann für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ noch ganz in D. In diesem Kreisring besitzt f nach Satz 9.8 eine eindeutig bestimmte Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die wir die **Laurent-Entwicklung von f in** z_0 nennen (und die offensichtlich nicht von ε abhängt).

Ist außerdem f nicht gleich der Nullfunktion auf $U_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ und damit die Laurent-Reihe nicht identisch gleich Null, so nennen wir die kleinste auftretende Potenz von $z - z_0$ in dieser Reihe, also die Zahl

$$\operatorname{ord}_{z_0} f := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\} & \text{falls diese Menge nach unten beschränkt ist,} \\ -\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

die **Ordnung** von f in z_0.

09

Wir können uns die Ordnung einer holomorphen Funktion in einer isolierten Singularität — sofern sie nicht $-\infty$ ist — wie folgt vorstellen:

Lemma 10.4. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $z_0 \in D$, oder $z_0 \in \mathbb{C} \backslash D$ eine isolierte Singularität von f. Wir nehmen an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion sowie $\operatorname{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ ist.*

Dann ist die Ordnung $\operatorname{ord}_{z_0} f$ die eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{Z}$, für die es eine holomorphe Funktion $g : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ gibt mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$$

für alle $z \in D$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer solchen Darstellung. Es sei dazu $m = \operatorname{ord}_{z_0} f \neq -\infty$. Wir setzen $g : D \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (z - z_0)^{-m} f(z)$ und müssen zeigen, dass g in z_0 eine hebbare Singularität mit Funktionswert ungleich 0 hat. Dazu entwickeln wir f in einer Umgebung von z_0 in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_m \neq 0$, woraus wir auch sofort die entsprechende Laurent-Reihe

$$g(z) = (z - z_0)^{-m} f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

für g erhalten. Da dies offensichtlich eine Potenzreihe mit konstantem Term $g(z_0) = a_m \neq 0$ ist, erhalten wir also eine Darstellung für f wie in der Behauptung des Lemmas.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit des Exponenten in dieser Darstellung zu zeigen. Angenommen, es wäre $f(z) = (z - z_0)^{m_1} g_1(z) = (z - z_0)^{m_2} g_2(z)$ für alle $z \in D$ und zwei verschiedene Exponenten m_1 und m_2, o. B. d. A. mit $m_1 < m_2$, wobei wieder g_1 und g_2 holomorph mit $g_1(z_0) \neq 0$ und $g_2(z_0) \neq 0$ sind. Dann wäre

$$g_1(z) = (z - z_0)^{m_2 - m_1} g_2(z) \quad \text{für alle } z \in D \backslash \{z_0\},$$

und wegen der Stetigkeit beider Seiten sogar für alle $z \in D \cup \{z_0\}$. Einsetzen von $z = z_0$ liefert dann aber einen Widerspruch, weil die linke Seite ungleich 0, die rechte dagegen gleich 0 ist. □

Die Ordnung einer holomorphen Funktion in einem Punkt lässt sich also offensichtlich als „Null- oder Polstellenordnung" interpretieren: Da in der Darstellung $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ wie oben die Funktion g holomorph in z_0 mit $g(z_0) \neq 0$ ist, können wir den Punkt z_0 je nach Vorzeichen von m als „m-fache Nullstelle" bzw. „$(-m)$-fache Polstelle" ansehen. Wir fassen dies in der folgenden Definition zusammen, die das Konzept der Null- und Polstellen von rationalen Funktionen auf beliebige holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten erweitert:

Definition 10.5 (Arten von Singularitäten)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und z_0 ein Punkt von D oder eine isolierte Singularität von f. Wir nehmen wieder an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion ist. Ferner sei $m = \operatorname{ord}_{z_0} f$.

(a) Ist $m > 0$, so heißt z_0 eine **Nullstelle** der Ordnung m von f.

(b) Ist $m < 0$ und $m \neq -\infty$, so heißt z_0 eine **Polstelle** der Ordnung $-m$ von f.

(c) Ist $m = -\infty$, so heißt z_0 eine **wesentliche Singularität** von f.

Beispiel 10.6.

(a) Nach Lemma 10.4 ist

$$\operatorname{ord}_0 \frac{1}{z^2 \cos z} = \operatorname{ord}_0 \left(z^{-2} \cdot \frac{1}{\cos z} \right) = -2,$$

denn die Funktion $g(z) = \frac{1}{\cos z}$ ist holomorph mit Funktionswert ungleich 0 in 0. Also hat $\frac{1}{z^2 \cos z}$ eine doppelte Polstelle in 0.

(b) Die Ordnung der Sinusfunktion im Nullpunkt ergibt sich mit Definition 10.3 direkt aus der Potenzreihenentwicklung zu

$$\operatorname{ord}_0 \sin z = \operatorname{ord}_0 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots \right) = 1.$$

Es liegt hier also eine einfache Nullstelle vor.

(c) Eine wesentliche Singularität hingegen hat die Funktion $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ im Nullpunkt, denn es gilt

$$\operatorname{ord}_0 e^{\frac{1}{z}} = \operatorname{ord}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = -\infty.$$

Bemerkung 10.7.

(a) Aus Lemma 10.4 folgt offensichtlich

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f_1 \cdot f_2) = \operatorname{ord}_{z_0} f_1 + \operatorname{ord}_{z_0} f_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}_{z_0} \frac{1}{f} = -\operatorname{ord}_{z_0} f$$

für holomorphe Funktionen $f, f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität z_0, sofern diese Ordnungen nicht $-\infty$ sind. Mit Beispiel 10.6 (b) ist also z. B.

$$\operatorname{ord}_0 \frac{1}{\sin z} = -\operatorname{ord}_0 \sin z = -1.$$

Für Funktionen mit wesentlichen Singularitäten sind diese Formeln jedoch in der Regel falsch: So haben z. B. $e^{\frac{1}{z}}$ und $e^{-\frac{1}{z}}$ beide im Nullpunkt die Ordnung $-\infty$, ihr Produkt hingegen ist konstant 1 und hat damit die Ordnung 0.

(b) Es sei $f \colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann ist die Ordnung $\operatorname{ord}_{z_0} f$ nach Definition genau dann größer oder gleich 0, wenn f eine Potenzreihe lokal um z_0 ist, was nach Folgerung 8.1 wiederum genau dann der Fall ist, wenn f holomorph in $D \cup \{z_0\}$ ist. Wir sehen also, dass z_0 genau dann eine hebbare Singularität ist, wenn $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq 0$ gilt.

Aufgabe 10.8. Liegt für die folgenden Funktionen f im Nullpunkt eine hebbare Singularität / Nullstelle (welcher Ordnung) / Polstelle (welcher Ordnung) / wesentliche Singularität vor?

(a) $f(z) = \dfrac{\sin(z^3)}{e^{\cos z - 1} - 1}$;

(b) $f(z) = z \cdot \log z$;

(c) $f(z) = z^n \cdot e^{z + \frac{1}{z}}$ (für $n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 10.9. Es sei $z_0 \in \mathbb{C} \backslash D$ eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}$. Man zeige:

(a) Ist z_0 eine Null- oder Polstelle von f, so hat die Funktion $\frac{f'}{f}$ eine Polstelle der Ordnung 1 in z_0.

(b) Die Funktion $g(z) = e^{f(z)}$ kann keine Polstelle in z_0 haben.

Aufgabe 10.10.

(a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$?

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(n) = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$?

Aus unseren Untersuchungen folgt nun ein sehr einfaches (und überraschendes) Kriterium dafür, wann eine isolierte Singularität z_0 einer holomorphen Funktion f hebbar ist, die Funktion f also holomorph nach z_0 fortgesetzt werden kann: Es reicht dafür schon aus, dass f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist!

Satz 10.11 (**Riemannscher Hebbarkeitssatz**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in \mathbb{C}\backslash D$ eine isolierte Singularität von f.*

Gibt es dann eine Umgebung U von z_0, so dass $U\backslash\{z_0\}$ ganz in D liegt und f auf dieser Menge beschränkt ist, so ist z_0 eine hebbare Singularität von f.

Beweis. Wir können annehmen, dass U eine Kreisscheibe um z_0 ist. Ferner sei M eine obere Schranke für $|f|$ auf $U\backslash\{z_0\}$, und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass die Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$ noch ganz in U liegt. Für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

von f in z_0 gilt dann

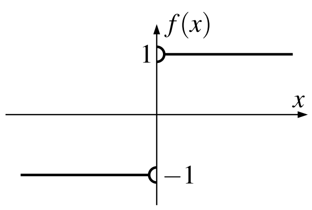
$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\varepsilon} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \right| && \text{(Satz 9.8 (b))} \\ &\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varepsilon \cdot \max_{|w-z_0|=\varepsilon} \left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right| && \text{(Lemma 4.4 (b))} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \max_{|w-z_0|=\varepsilon} |f(w)| \\ &\le \frac{M}{\varepsilon^n}. \end{aligned}$$

Bilden wir nun den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$, so sehen wir also, dass $a_n = 0$ für $n < 0$ ist. Damit ist f lokal eine Potenzreihe um z_0 und somit holomorph fortsetzbar nach z_0. □

Bemerkung 10.12.

(a) Beachte, dass die zu Satz 10.11 analoge Aussage in der reellen Analysis natürlich falsch ist: Eine differenzierbare Funktion, die z. B. auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definiert und dort beschränkt ist, muss damit noch lange nicht als differenzierbare Funktion nach $\mathbb{R}$ fortsetzbar sein — wie das Beispiel der Vorzeichenfunktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



zeigt, die sich nicht einmal stetig in den Nullpunkt hinein fortsetzen lässt.

(b) Insbesondere folgt aus Satz 10.11, dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität z_0, die *stetig* nach z_0 fortsetzbar ist, automatisch auch *holomorph* nach z_0 fortsetzbar ist (denn wenn f stetig in z_0 ist, ist f natürlich insbesondere in einer Umgebung von z_0 beschränkt). Auch hier ist die entsprechende Aussage im Reellen natürlich falsch.

(c) Mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz lässt sich die Aussage des Satzes 8.2 von Liouville noch etwas verallgemeinern: eine beschränkte holomorphe Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme einiger (nicht notwendig endlich vieler) isolierter Singularitäten holomorph ist, ist nun nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz zunächst in die isolierten Singularitäten holomorph fortsetzbar, und dann als ganze Funktion nach dem Satz von Liouville wieder konstant.

Aufgabe 10.13. Es seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \le |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $f = \lambda\, g$.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch das Verhalten holomorpher Funktionen in der Umgebung von isolierten Singularitäten untersuchen.

Bemerkung 10.14 (Meromorphe Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, und z_0 ein Punkt von D oder eine isolierte Singularität von f. Ist z_0 keine wesentliche Singularität von f, so ist das Verhalten von f für $z \to z_0$ klar:

(a) Ist $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq 0$, also z_0 hebbar und f damit insbesondere nach z_0 stetig fortsetzbar, so konvergiert f für $z \to z_0$ natürlich gegen den Funktionswert $f(z_0)$.

(b) Ist $\operatorname{ord}_{z_0} f < 0$ und $\operatorname{ord}_{z_0} f \neq -\infty$, hat f also eine Polstelle in z_0, so können wir f nach Lemma 10.4 als $\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ mit $m = -\operatorname{ord}_{z_0} f$ schreiben, wobei g holomorph auf $D \cup \{z_0\}$ mit $g(z_0) \neq 0$ ist. Es gilt dann also
$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$
Man schreibt dies der Einfachheit halber auch oft als $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ und sagt wie im Reellen, dass f für $z \to z_0$ (im uneigentlichen Sinne) gegen ∞ konvergiert. Wir könnten in diesem Fall also sinnvoll „$f(z_0) := \infty$“ setzen. In der Tat ist es möglich, das Konzept stetiger und sogar holomorpher Funktionen mit Zielbereich $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ so zu definieren, dass die so konstruierte Fortsetzung in $D \cup \{z_0\}$ dann holomorph wird.

In der Literatur werden solche Funktionen, die auf einer offenen Menge mit Ausnahme von nichtwesentlichen isolierten Singularitäten holomorph sind, als *meromorphe Funktionen* bezeichnet.

Das Verhalten in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist dagegen deutlich komplizierter. In diesem Fall nähern sich die Funktionswerte von f für $z \to z_0$ weder einer komplexen Zahl noch streben sie gegen ∞:

Satz 10.15 (**Satz von Casorati-Weierstraß**)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, und z_0 ein Punkt von D oder eine isolierte Singularität von f. Wir nehmen wieder an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion ist. Dann sind äquivalent:*

(a) *$\operatorname{ord}_{z_0} f = -\infty$, d. h. f hat eine wesentliche Singularität in z_0.*

(b) *Für jede Umgebung U von z_0 mit $U \backslash \{z_0\} \subset D$ liegt $f(U \backslash \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$ im Sinne von Aufgabe 8.5, d. h. für jede nicht-leere offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ ist $f(U \backslash \{z_0\}) \cap V \neq \emptyset$. (Anschaulich bedeutet dies also, dass f „in jeder Umgebung von z_0 jeder komplexen Zahl beliebig nahe kommt“.)*

Beweis. Für die Richtung „(a) $\Rightarrow$ (b)“ nehmen wir an, dass die Aussage (b) falsch ist, d. h. dass es eine offene Umgebung U von z_0 und eine nicht-leere offene Menge V gibt mit $f(U \backslash \{z_0\}) \cap V = \emptyset$. Dabei können wir V durch eventuelles Verkleinern als Kreisscheibe $V = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \varepsilon\}$ für gewisse $w_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ wählen. Dies bedeutet dann aber gerade, dass
$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U \backslash \{z_0\}.$$
Die holomorphe Funktion
$$g\colon U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$
ist daher wohldefiniert und beschränkt (durch $\frac{1}{\varepsilon}$). Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 10.11 lässt sich g also zu einer holomorphen Funktion auf ganz U fortsetzen. Damit hat
$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$$
aber im Punkt z_0 entweder eine hebbare Singularität (falls $g(z_0) \neq 0$) oder einen Pol (der Ordnung $\operatorname{ord}_{z_0} g$, falls $g(z_0) = 0$). Auch die Aussage (a) ist damit also falsch, was den Beweis der Richtung „(a) $\Rightarrow$ (b)“ beendet.

Die umgekehrte Richtung „(b) $\Rightarrow$ (a)“ ist dagegen klar nach Bemerkung 10.14, denn für eine isolierte Singularität z_0 mit $\operatorname{ord}_{z_0} \neq -\infty$ konvergiert $f(z)$ für $z \to z_0$ stets gegen eine komplexe Zahl oder gegen

∞, so dass das Bild $f(U\backslash\{z_0\})$ für eine genügend kleine Umgebung U von z_0 nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegen kann. $\square$

Aufgabe 10.16. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Beweise, dass f von der Form $z \mapsto az+b$ für gewisse $a,b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ sein muss.

(Hinweis: Zeige zunächst mit dem Satz 10.15 von Casorati-Weierstraß, dass die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ keine wesentliche Singularität im Nullpunkt haben kann.)