

Algebraische Strukturen – Blatt 7

(keine Abgabe)

- (1) Bestimme alle $x \in \mathbb{Z}$, für die die folgenden Gleichungssysteme erfüllt sind:
- (a) $x = 2 \pmod{4}$
 $x = 6 \pmod{7}$
 $x = 3 \pmod{9}$
- (b) $x = 5 \pmod{6}$
 $3x = -1 \pmod{14}$
- (c) $x = 1 \pmod{n}$ für alle $n = 2, \dots, 10$
- (2) Man beweise oder widerlege:
- (a) $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_5^*$;
(b) $\mathbb{Z}_{15}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.
- (3) Bestimme die Primfaktorzerlegungen des Polynoms $f = t^3 - t^2 - 2t + 2 \in K[t]$ über den Körpern $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Q}[u]/\langle u^2 - 2 \rangle$.
- (4) (a) Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit der Funktion $\delta(z) := |z|^2$ ein euklidischer Ring (und damit ein Hauptidealring) ist.
(b) Zerlege die Zahl 15 im Ring $\mathbb{Z}[i]$ in Primfaktoren.