Andreas Gathmann und Max Mayer Sommersemester 2023

Algebraische Strukturen – Blatt 6

Abgabe: Mittwoch, 12. Juli

Aufgabe 1 benötigt den (erweiterten) euklidischen Algorithmus, der analog zu Beispiel 10.16 funktioniert und am Anfang der kommenden Vorlesungsstunde behandelt wird.

(1) Es seien $f = t^5 + \overline{2}t^3 - t$ und $g = \overline{2}t^3 + t^2 + \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_5[t]$.

(a) Berechne alle größten gemeinsamen Teiler von f und g und stelle einen von ihnen in der Form $df + eg$ mit $d, e \in \mathbb{Z}_5[t]$ dar.

(b) Liegt das Polynom $t^3 + t^2 + \overline{1}$ im Ideal $\langle f, g \rangle$?

(c) Ist $\overline{t^{1000}}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}_5[t]/\langle f, g \rangle$?

(2) Bestimme alle gemeinsamen Teiler von $2 + 2\sqrt{5}\,\mathrm{i}$ und 6 im Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}\,\mathrm{i}]$ und zeige so, dass es keinen größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Zahlen in R gibt.

(3) (a) Es sei $f \in K[t] \backslash \{0\}$ ein Polynom über einem Körper K. Zeige, dass jedes Element von $K[t]/\langle f \rangle$ eindeutig als $\overline{g}$ für ein Polynom $g \in K[t]$ mit $\deg g < \deg f$ geschrieben werden kann.

(b) Zeige, dass

$$\mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle \to \mathbb{C}, \ \overline{f} \mapsto f(\mathrm{i})$$

ein Ringisomorphismus ist.

(Man kann $\mathbb{C}$ also algebraisch sehr elegant als $\mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle$ definieren — dies definiert dann gleichzeitig schon die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ und zeigt dafür ohne weitere Rechnung alle Ringaxiome.)

(c) Ist auch der Ring $\mathbb{R}[t]/\langle t^2 - 1 \rangle$ isomorph zu $\mathbb{C}$?

(4) Es sei $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ eine Folge von Idealen in einem Ring R, von denen jedes im nächsten enthalten ist (man spricht in diesem Fall auch von einer aufsteigenden Kette von Idealen).

(a) Zeige, dass die Vereinigung $I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ aller dieser Ideale wieder ein Ideal in R ist.

(b) Ist R ein Hauptidealring, so zeige man, dass die Kette von Idealen ab einem gewissen Glied konstant ist, d. h. dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$.

(c) Gib ein Beispiel für einen Ring R und eine aufsteigende Kette von Idealen in R an, die nicht ab einem gewissen Glied konstant ist.