Andreas Gathmann und Max Mayer

Algebraische Strukturen – Blatt 5

Abgabe: Mittwoch, 28. Juni

(1) (a) Bestimme alle Einheiten der Ringe $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{5}\,\mathrm{i}]$.
(Hinweis: Für eine komplexe Zahl z betrachte man das Betragsquadrat $|z|^2$. Aus den Grundlagen der Mathematik ist bekannt, dass $|zw|^2 = |z|^2\,|w|^2$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.)
(b) Zeige, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ unendlich viele Einheiten besitzt.

(2) Ist I ein Ideal in einem Ring R, so heißt

$$\sqrt{I} := \{a \in R : a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \quad \subset R$$

das *Radikal* von I.

(a) Zeige, dass $\sqrt{I}$ wieder ein Ideal von R ist.
(b) Man zeige: Ist $a \in \sqrt{\langle 0 \rangle}$, so ist $1 + a$ eine Einheit in R.
(c) Berechne das Ideal $\sqrt{180\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{Z}$.

(3) Es sei R ein Ring. Man zeige:

(a) Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ über R ist genau dann in $R[[t]]$ invertierbar, wenn $a_0 \in R^*$.
(b) Ist R ein Körper, so ist jedes Ideal $I \trianglelefteq R[[t]]$ mit $I \neq \{0\}$ von der Form $I = \langle t^n \rangle$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(4) Es seien R ein Ring und $e \in R$ mit $e^2 = e$. Man zeige:

(a) Das von e erzeugte Ideal $\langle e \rangle$ ist ein Ring. Was ist das Einselement in $\langle e \rangle$?
(b) Die Abbildung $f\colon R \to \langle e \rangle$, $f(a) = ae$ ist ein Ringhomomorphismus.
(c) Der Ring $\langle e \rangle$ ist isomorph zu $R/\langle 1 - e \rangle$.