Andreas Gathmann und Max Mayer Sommersemester 2023

Algebraische Strukturen – Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 14. Juni

(1) (a) Für welche $a,b \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ \overline{x} \mapsto \overline{ax+b}$ eine wohldefinierte Abbildung?

(b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_5$ und von $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_5^*$.

(2) Es sei U eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Man zeige:

(a) Gibt es keine weitere Untergruppe von G, die genauso viele Elemente wie U hat, so ist U ein Normalteiler von G.
(Hinweis: Untersuche zu einem gegebenen $a \in G$ die Teilmenge aUa^{-1} von G.)

(b) Ist $|U| = \frac{1}{2}\,|G|$, so ist U ein Normalteiler von G.

(3) (a) Man zeige: Ist G eine Gruppe, die keine nicht-trivialen Untergruppen besitzt, so ist $G = \{e\}$ oder $G \cong \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p.

(b) Es sei U ein Normalteiler in einer Gruppe G. Man zeige: Gibt es einen Morphismus $f\colon G \to U$ mit $f|_U = \mathrm{id}_U$, so ist $G \cong (G/U) \times U$.

(4) (a) Es sei N ein Normalteiler einer Gruppe G. Man zeige: Für jede Untergruppe U von G mit $U \supset N$ ist U/N eine Untergruppe von G/N, und die Abbildung

$$\begin{aligned}\{U\colon U \text{ ist Untergruppe von } G \text{ mit } U \supset N\} &\to \{V\colon V \text{ ist Untergruppe von } G/N\}\\ U &\mapsto U/N\end{aligned}$$

ist bijektiv. (Die Untergruppen einer Faktorgruppe G/N entsprechen in diesem Sinne also genau den Untergruppen von G, die N enthalten.)

(b) Bestimme mit Hilfe von (a) alle Untergruppen von $\mathbb{Z}_n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$.