Andreas Gathmann und Max Mayer Sommersemester 2023

# *Algebraische Strukturen – Blatt 3*

*Abgabe: Mittwoch, 31. Mai*

(1) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen

(a) von $S_5$ nach $\mathbb{Z}$;

(b) von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$.

(Alle Gruppen seien dabei stets mit ihren üblichen Verknüpfungen versehen.)

(2) Sind die folgenden Gruppen isomorph?

(a) $S_{n-1}$ und die Untergruppe $U := \{\sigma \in S_n : \sigma(n) = n\}$ von $S_n$ (für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$);

(b) die Diedergruppe $D_6$ und die alternierende Gruppe $A_4$;

(c) $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$.

(3) Welche Ordnungen können Untergruppen der symmetrischen Gruppe $S_4$ haben? Man gebe für jede mögliche Ordnung eine solche Untergruppe in der Form $\langle\, \sigma \,\rangle$ oder $\langle\, \sigma, \tau \,\rangle$ für geeignete $\sigma, \tau \in S_4$ an.
(Hinweis: Um die Ordnung einer Untergruppe der Form $\langle\, \sigma, \tau \,\rangle$ zu berechnen, ohne alle ihre Elemente explizit zu bestimmen, ist das Ergebnis von Aufgabe 4 nützlich.)

(4) Es seien $U$ und $V$ zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe $G$. Man zeige:

(a) Durch
$$(u,v) \sim (u',v') \quad :\Leftrightarrow \quad uv = u'v'$$
wird eine Äquivalenzrelation auf $U \times V$ definiert.

(b) Die Äquivalenzklasse von $(u,v) \in U \times V$ ist $\overline{(u,v)} = \{(ua, a^{-1}v) : a \in U \cap V\}$ und besitzt genau $|U \cap V|$ Elemente.

(c) Es gilt die *Produktformel* für Untergruppen
$$|UV| = \frac{|U| \cdot |V|}{|U \cap V|},$$
wobei $UV = \{uv : u \in U, v \in V\}$.