Algebraische Strukturen – Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, 17. Mai

(1) Beim im Bild (A) unten dargestellten „Schiebepuzzle“ sind mit den Zahlen 1 bis 15 beschriftete Würfel zufällig so in einem 4×4-Quadrat angeordnet, dass das Feld rechts unten frei bleibt.

Man kann nun nacheinander Würfel von links, rechts, oben oder unten in den jeweils freien Platz schieben und so z. B. von (A) aus die Position (B) erreichen, indem man den Würfel 2 nach unten schiebt. Ziel des Spiels ist es, durch solche Züge letztlich die vollständig geordnete Position (C) zu erreichen.

14	10	15	1
6	7	8	9
5	4	3	2
13	12	11	

(A)

14	10	15	1
6	7	8	9
5	4	3	
13	12	11	2

(B)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(C)

Wir wollen die möglichen Positionen des Puzzles im Folgenden als Permutationen in S_{16} auffassen, indem wir zeilenweise jeder Stelle von links oben nach rechts unten die Nummer des dort liegenden Würfels zuordnen und den freien Platz dabei mit 16 bezeichnen. Die Zielposition (C) ist also z. B. gerade die Identität in S_{16}.

(a) Berechne das Signum der Ausgangsposition (A).

(b) Zeige, dass jeder mögliche Spielzug das Signum der Spielposition ändert.

(c) Beweise, dass es nicht möglich ist, von Position (A) aus das Ziel (C) zu erreichen.

(2) (a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Menge $U = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = ax + b\}$ eine Untergruppe von $G = (\mathbb{R},+) \times (\mathbb{R},+)$?

(b) Es sei G eine Gruppe. Für welche $g, h \in G$ ist die Abbildung $f\colon G \to G,\ f(a) = gah$ ein Morphismus?
Untersuche f in diesen Fällen auch auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Es seien $f, g\colon G \to H$ zwei Gruppenhomomorphismen. Zeige, dass $U = \{a \in G : f(a) = g(a)\}$ eine Untergruppe von G ist.

(3) Es sei U eine nicht-leere Teilmenge einer Gruppe G. Beweise die folgenden vereinfachten Untergruppenkriterien:

(a) U ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $ab^{-1} \in U$ für alle $a, b \in U$ gilt.

(b) Hat U nur endlich viele Elemente, so ist U genau dann eine Untergruppe von G, wenn $ab \in U$ für alle $a, b \in U$ gilt.

(4) Für eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ betrachten wir in S_n die Permutationen

$$\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n) \quad \text{und} \quad \tau\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\},\ i \mapsto n+1-i$$

und setzen $D_n := \{\sigma^k \tau^l : k, l \in \mathbb{Z}\} \subset S_n$.

(a) Zeige, dass D_n eine Untergruppe von S_n ist.
Offensichtlich ist dann $D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$. Man nennt D_n die n-te *Diedergruppe*.
(Hinweis: Zeige und benutze die Gleichung $\sigma^{-1}\tau = \tau\sigma$.)

(b) Zeige, dass $|D_n| = 2n$.