Algebraische Strukturen – Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, 3. Mai

(1) Ist $(G,*)$ in den folgenden Fällen eine Gruppe? (Man gebe einen Beweis der Gruppenaxiome oder ein Gegenbeispiel für ein verletztes Axiom an.)

(a) $G = \mathbb{Q}_{>0}$ mit der Verknüpfung $a*b = \frac{a \cdot b}{2}$;

(b) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $(a_1,a_2)*(b_1,b_2) = (a_1+b_2, a_2+b_1)$.

(Auf der rechten Seite der Gleichungen bezeichnen „+“, „ · “ und der Bruchstrich hierbei die gewöhnliche Addition, Multiplikation bzw. Division reeller Zahlen.)

(2) Man zeige:

(a) Ist G eine Gruppe mit $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a,b \in G$, so ist G abelsch.

(b) Ist G eine Gruppe mit $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist G abelsch.

(c) Jede nicht-abelsche Gruppe hat mindestens 5 Elemente.

(3) Es seien G eine Gruppe und $a,b \in G$. Man zeige:

(a) Ist G endlich, so ist auch $\operatorname{ord} a \neq \infty$.

(b) $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$.

(c) $\operatorname{ord}(a^{-1}) = \operatorname{ord} a$.

(4) Es sei G eine Menge mit einer Verknüpfung, von der wir lediglich wissen, dass sie die Assoziativität (G1) und die Existenz eines linksneutralen Elements (G2) erfüllt, aber nicht notwendig die Existenz eines linksinversen Elements (G3). Man zeige:

(a) Ist G endlich, und gilt die rechtsseitige Kürzungsregel

$$ax = bx \Leftrightarrow a = b$$

für alle $a,b,x \in G$, so ist G bereits eine Gruppe.

(b) Ist G unendlich, so ist diese Folgerung im Allgemeinen falsch.
(Mit anderen Worten: Finde ein Beispiel einer unendlichen Menge mit einer Verknüpfung, die (G1), (G2) und die rechtsseitige Kürzungsregel erfüllt, aber keine Gruppe bildet.)

Die Abgabe der Lösungen kann allein oder in Zweiergruppen erfolgen. Um den Arbeitsaufwand dabei sowohl für euch als auch für die Übungsleiter beim Korrigieren in Grenzen zu halten, solltet ihr möglichst zu zweit abgeben. Bitte werft eure Lösungen ins Postfach eures Übungsgruppenleiters neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab.